

PŘÍPRAVNÝ KURZ NA MATURITU Z MATEMATIKY

Fakulta strojní ČVUT v Praze 2026

Lekce 4

Goniometrické funkce a rovnice

Příklady

Příklad 1

Pro $x \in \langle \pi; 2\pi \rangle$ platí:

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

Jaká je hodnota $\operatorname{tg} x$?

A) hodnota neexistuje

B) $-\sqrt{3}$

C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

E) $\sqrt{3}$

Příklad 2

Pro $x \in \mathbf{R}$ je dána funkce:

$$g: y = \sin\left(x + \frac{7\pi}{6}\right)$$

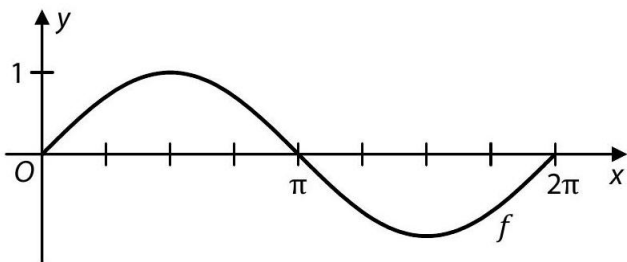
Vypočtěte obě souřadnice průsečíku P grafu funkce g se souřadnicovou osou y .

Určete nejmenší kladné číslo x , pro které platí:

$$\sin\left(x + \frac{7\pi}{6}\right) = 1$$

Příklad 3

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestaven graf funkce $f: y = \sin x$ pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.



Vypočítejte všechny hodnoty proměnné $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, pro něž je $f(x) = -0,5$.

Příklad 4

V intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ řešte:

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sin x}{\cos x} = -1$$

Příklad 5

$$\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x$$

$$\cos 2x + 1$$

$$\frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$$

Pro $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ přiřaďte ke každému výrazu jeho ekvivalentní vyjádření:

- A) $\sin^2 x$
- B) $\cos^2 x$
- C) $2 \cdot \sin x$
- D) $2 \cdot \sin^2 x$
- E) $2 \cdot \cos^2 x$

Goniometrické funkce

Určete (zjednodušte) dané výrazy. Určete pro jaká x mají smysl:

Příklad 1

$$\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$$

$$\left[1 - \sin x, x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right]$$

Příklad 2

$$\operatorname{cotg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\left[\frac{1}{\sin x}, x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z} \right]$$

Příklad 3

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$$

$$\left[1, x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right]$$

Příklad 4

$$-\sin(2\pi - x)$$

$$[\sin x, x \in \mathbf{R}]$$

Příklad 5

$$\cotg \frac{x}{2} \cdot \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\left[\frac{1}{2} \sin x, x \neq 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right]$$

Goniometrické rovnice

V oboru \mathbf{R} řešte dané rovnice:

Příklad 1

$$\sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\left[x = k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right]$$

Příklad 2

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1$$

$$[x = k\pi, k \in \mathbf{Z}]$$

Příklad 3

$$\sin 2x = \cotg x$$

$$\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right]$$

Příklad 4

$$\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right]$$

Příklad 5

Na intervalu $(0; 2\pi)$ neleznete všechna řešení rovnice:

$$\sin x - \sin 2x + 2 \cdot \cos x - 1 = 0$$

$$\left[x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{5}{3}\pi \right]$$

Příklad 6

$$\tg x + \cotg x - 2 = 0$$

$$\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right]$$

Příklad 7

$$\cos^2 x - 2 \cos x + 1 = 0$$

$$[x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}]$$

Příklad 8

$$\sin^2 x + 2 \sin x = 0$$

$$[x = k\pi, k \in \mathbf{Z}]$$

Příklad 9

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1}{3}$$

$$\left[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right]$$

Příklad 10

$$\frac{\tg x - 1}{\tg x + 1} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\left[x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right]$$

Příklad 11

$$\tg x \cdot (\sin x - 1) = \frac{1}{2 \cos x} - \cos x$$

$$\left[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right]$$

Příklad 12

$$\tg \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right]$$

Příklad 13

$$\sin 2x = \cos 3x \sin 2x$$

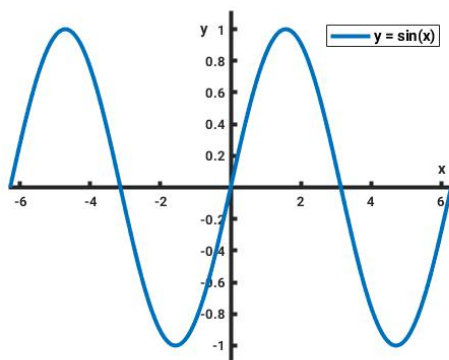
$$\left[x = k\frac{\pi}{2}, x = \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbf{Z} \right]$$

Funkce

- Sinus

$y = \sin x$, perioda: $p = 2\pi$

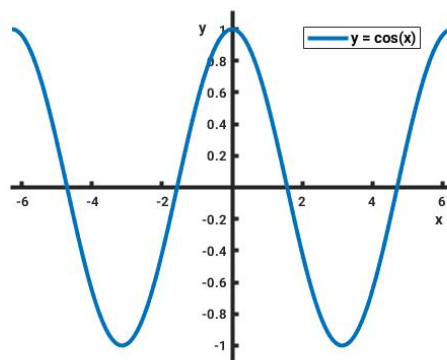
$$D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \langle -1, 1 \rangle$$



- Kosinus

$y = \cos x$, perioda: $p = 2\pi$

$$D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \langle -1, 1 \rangle$$

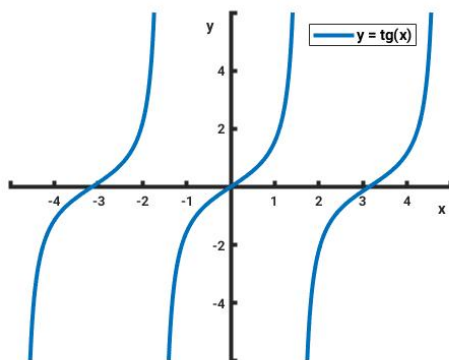


- Tangens

$y = \operatorname{tg} x$, perioda: $p = \pi$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$H(f) = \mathbb{R}$$

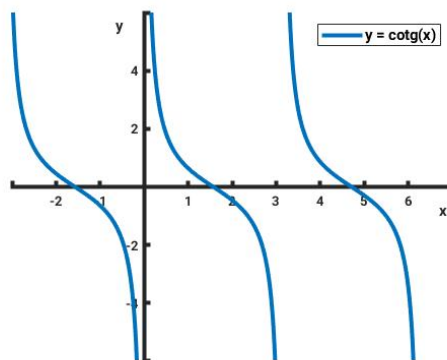


- Kotangens

$y = \operatorname{cotg} x$, perioda: $p = \pi$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$H(f) = \mathbb{R}$$



Vybrané vzorce

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$