FAKULTA STROJNÍ ČVUT V PRAZE

PŘÍPRAVNÝ KURZ NA MATURITU Z MATEMATIKY

Fakulta strojní ČVUT v Praze 2025

Lekce 9
Analytická geometrie

Příklady z katalogu požadavků

Příklad 1 - MA 2024 jaro

V kartézské soustavě souřadnic jsou dány body $A[1; 0]$, $B[1; -6]$, $C[5; -3]$.

Jaký je obvod trojúhelníku ABC?

A) 16

B) 22,7

C) 46

D) Body A, B a C netvoří trojúhelník.

E) jiný výsledek

Příklad 2 - MA 2024 jaro

Je dána přímka p:

$$x = 3 + 2t$$
$$y = 1 - t;\ t \in \mathbf{R}$$

Obecná rovnice této přímky je:

A) $x + 2y - 5 = 0$

B) $x + 2y - 7 = 0$

C) $x - 2y - 1 = 0$

D) $2x + y - 7 = 0$

E) $2x - y - 5 = 0$

Příklad 3 - MA 2024 podzim

Předpis kvadratické funkce g pro všechna $x \in \mathbf{R}$ je

$y = x^2 - 2x - 2$

Určete kartézské souřadnice vrcholu paraboly, která je grafem funkce g.

Příklad 4 - MA

Je dána přímka $p: x - 2y - 7 = 0$.

Jaké může být její parametrické vyjádření?

A) $x = 1 + 2t, y = -3 + t; t \in \mathbf{R}$

B) $x = -1 - 2t, y = -3 - t; t \in \mathbf{R}$

C) $x = -3 + 2t, y = 1 + t; t \in \mathbf{R}$

D) $x = 1 - 2t, y = -3 + t; t \in \mathbf{R}$

E) $x = -1 + 2t, y = 3 - t; t \in \mathbf{R}$

Příklad 5 - MA

Je dána přímka $q: x = 3t, y = 12 - 4t; t \in \mathbf{R}$.

Vypočtěte vzdálenost přímky q od rovnoběžné přímky p, která prochází počátkem soustavy souřadnic.

Příklad 6 - MA

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem S. Označme vektory $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (3.1–3.4), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).

		A	N
3.1	$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$	☐	☐
3.2	$\overrightarrow{SB} = \vec{u} - \vec{v}$	☐	☐
3.3	$\overrightarrow{AE} = 2\vec{v} - \vec{u}$	☐	☐
3.4	$\overrightarrow{FD} = 2\vec{u} - \vec{v}$	☐	☐

Příklad 7 - MX

V rovnoběžníku $ABCD$ je dán střed souměrnosti $S[2; 0]$ a vektory $\vec{u} = B - A = (5; -1)$, $\vec{v} = D - A = (1; 3)$.

Který z uvedených bodů je vrcholem daného rovnoběžníku?

A) $A[-3; -1]$

B) $B[5; -1]$

C) $C[5; 1]$

D) $D[-1; 1]$

E) žádný z uvedených

Příklad 8 - MX

Jsou dány vektory $\vec{u} = (-1; 1; 2)$ a $\vec{v} = (-2; 0; 5)$.

Který vektor je kolmý k oběma vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$?

A) $\vec{a} = (-5; 1; 2)$

B) $\vec{b} = (-5; -1; 2)$

C) $\vec{c} = (5; 1; 2)$

D) $\vec{d} = (-2; 1; 5)$

E) $\vec{e} = (2; -1; 5)$

Příklad 9 - MX

Kružnice se středem $S[3; -4]$ prochází počátkem soustavy souřadnic.

Napište obecnou rovnici kružnice.

Příklad 10 - MX

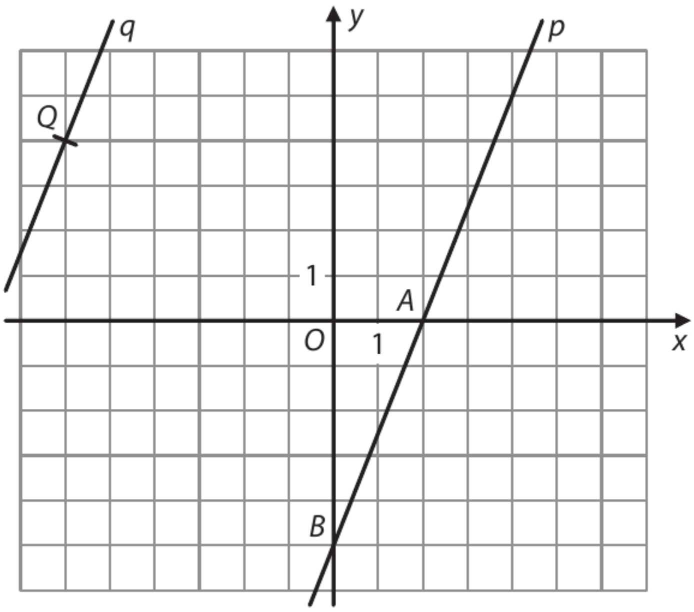
Řídicí přímka paraboly má rovnici $x = 2$. Ohniskem paraboly je bod $F[-4; 2]$.

Napište vrcholovou rovnici paraboly.

Příklady podzim 2023

Příklad 11 - MA

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* jsou umístěny rovnoběžné přímky *p*, *q*.
Přímka *p* protíná souřadnicové osy v mřížových bodech *A*, *B*.
Přímka *q* prochází bodem $Q[-6; 4]$.



V parametrickém vyjádření přímky *p* doplňte pravou stranu první rovnice.

$p: x = \qquad ,$
$\quad\; y = 0 + 5t, \quad t \in \mathbf{R}$

Zapište obě souřadnice průsečíku *D* přímky *q* se souřadnicovou osou *y*.

Příklad 12 - MA

Všechny čtyři vrcholy kosočtverce *ABCD* leží **na souřadnicových osách** kartézské soustavy souřadnic *Oxy*. Pro vrcholy *A*, *B* kosočtverce platí, že orientovaná úsečka *AB* je umístěním vektoru $\vec{v} = (12; 5)$.

Jaký je obsah kosočtverce *ABCD*?

A) 52

B) 60

C) 120

D) 169

E) jiný obsah

Příklad 13 - MA

Vektor $\vec{u} = (3; u_2)$ je kolmý k vektoru $\vec{w} = (-3; 1)$.

Jaká je velikost vektoru $\vec{u}$?

A) $3\sqrt{10}$

B) $\sqrt{10}$

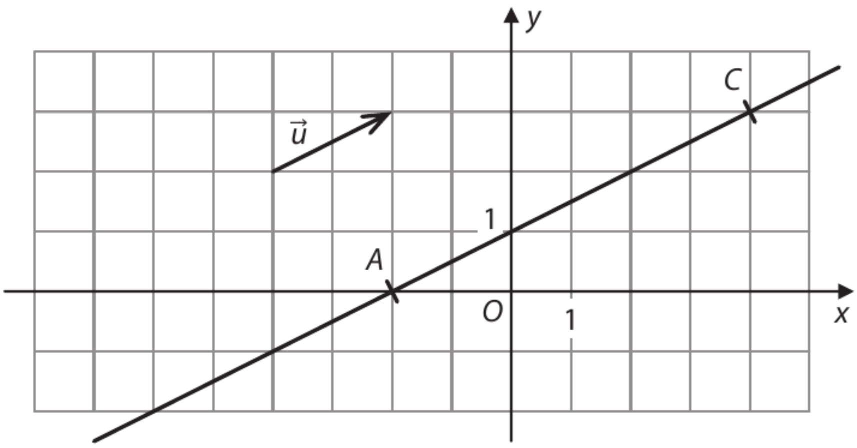
C) 10

D) 3

E) jiná velikost

Příklad 14 - MX

Libovolný bod X přímky AC lze vyjádřit rovnicí $X = A + t \cdot \vec{u}$, kde $t \in \mathbf{R}$.



Body A, C i počáteční a koncový bod orientované úsečky, která je umístěním vektoru $\vec{u}$, jsou v mřížových bodech.

Určete množinu <u>všech</u> hodnot parametru t, pro něž je bod X bodem úsečky AC.

$t \in$ ______________

Příklad 15 - MX

Pro kružnici k a přímku p platí:

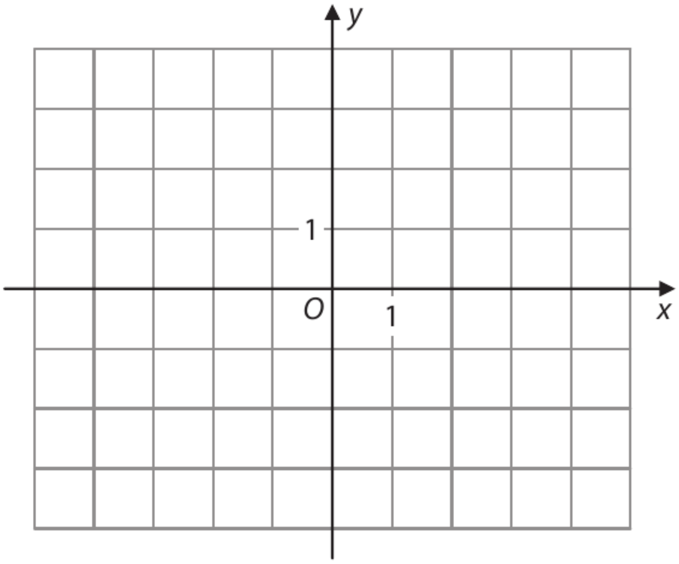
k: $x^2 + (y-3)^2 = 25$
p: $y = x + 2$

Zapište souřadnice průsečíků P, Q přímky p a kružnice k (pokud existují)**.**

Příklad 16 - MX

Elipsa má rovnici $x^2 - 2x - 15 + 4y^2 = 0$.

Tečny k elipse v jejích hlavních a vedlejších vrcholech vymezují obdélník *KLMN*.



Určete obě souřadnice středu $S[s_1; s_2]$ elipsy.

Vypočtěte excentricitu e elipsy.

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* zakreslete obdélník *KLMN*.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

Další příklady

Příklad 17

Napište parametrický, obecný a směrnicový tvar rovnice přímky, která prochází body A = [5, 2], B = [9, 4]. Načrtněte obrázek.

Příklad 18

Určete a načrtněte kuželosečky, které jsou dány následujícími rovnicemi:

a) $x = y^2 - 3$

b) $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 2 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 6y - 3 = 0$

d) $x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

Příklad 19

Načrtněte rovinný obrazec D, který je omezen danými křivkami nebo je zadán nerovnicemi:

a) $x + y \leq 1$, $x + 1 \geq y \geq 0$

b) $y \geq 0$, $y \leq 2 - x$, $x \geq y^2$

c) $2x + 2y = 5$, $xy = 1$

d) $x^2 + y^2 \leq 4x$, $y \geq 0$

Výsledky

Příklad 1: A) 16
Příklad 2: A) $x + 2y - 5 = 0$
Příklad 3: $V = [1; -3]$
Příklad 4: A
Příklad 5: 36/5
Příklad 6: A, A, A, N
Příklad 7: A
Příklad 8: C
Příklad 9: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$
Příklad 10: $(y - 2)^2 = -12(x + 1)$
Příklad 11: $x = 2 + 2t$, $D = [0; 19]$
Příklad 10: 120 C
Příklad 13: $3\sqrt{10}$ A
Příklad 14: $t \in < 0; 3 >$
Příklad 15: $P = [4; 6]$, $Q = [-3; -1]$
Příklad 16: $S = [1; 0]$, $e = 2\sqrt{3}$, obrázek
Příklad 17:

$x = 5 + 4t$, $y = 2 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$,
$x - 2y - 1 = 0$,
$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Příklad 18:

a) Parabola, osa v ose x, vrchol V = [-3, 0], otevřená doprava
b) Elipsa S = [2, -1], a = 2, b = $\sqrt{2}$
c) Kružnice S = [0, -3], r = $\sqrt{12}$
d) Hyperbola S = [3, 1], a = 4, b = 2

Příklad 19:

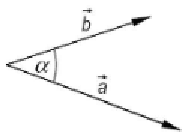
a) Rovnoramenný trojúhelník nad osou x, souměrný podle osy y
b) "Křivočarý"trojúhelník v prvním kvadrantu ohraničený dvěma úsečkami a částí paraboly
c) Obrazec ohraničen v prvním kvadrantu úsečkou a rovnoosou hzperbolou
d) Posunutý půlkruh v prvním kvadrantu, S = [2, 0]

Vybrané vzorce

1. **Body a vektory:**

- Vzdálenost dvou bodů:
  $A = [x_A, y_A, z_A]$, $B = [x_B, y_B, z_B]$
  (velikost vektoru $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A$)
  $\|AB\| = \|\vec{u}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

- Skalární součin a úhel dvou vektorů:



<u>Skalární součin</u> <u>nenulových vektorů</u>

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\cos\alpha$$

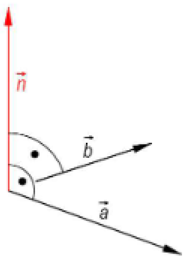
$$\vec{a}.\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b} \text{ - kolmé vektory}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|}, \quad \alpha = \text{úhel vektorů}$$

<u>Příklad 1</u>: $\vec{a} = (2,-4,2)$, $\vec{b} = (-1,2,2)$ $\Rightarrow$ $\vec{a}.\vec{b} = \mathbf{-6}$

<u>Příklad 2</u>: $\vec{a} = (2,-4,2)$, $\vec{b} = (-1,2,?)$, $\vec{a} \perp \vec{b}$ $\Rightarrow$ $\vec{b} = \mathbf{(-1,2,5)}$

- Vektorový součin:



<u>Vektorový součin</u> <u>nenulových vektorů</u>

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_2.b_3 - a_3.b_2, -[a_1.b_3 - a_3.b_1], a_1.b_2 - a_2.b_1)$$

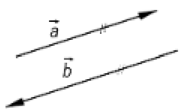
$$\vec{n} \perp (\vec{a}, \vec{b})$$

<u>Příklad</u>: $\vec{a} = (2,4,3)$, $\vec{b} = (1,2,2)$, $\vec{a} \times \vec{b} = ?$

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (2,4,3)$
$\underline{\text{x}\,(1,2,2)}$
$\mathbf{(2,-1,0)}$

$\vec{n}.\vec{a} = (2,-1,0).(2,4,3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \perp \vec{a}$
$\vec{n}.\vec{b} = (2,-1,0).(1,2,2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \perp \vec{b}$

- Lineárně závislé (rovnoběžné) vektory:



<u>Závislé</u> ("rovnoběžné") nenulové **<u>vektory</u>**

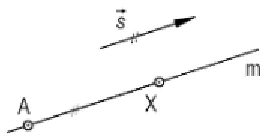
$$\vec{b} = k.\vec{a}$$

<u>Příklad</u>: $\vec{a} = (-1,2,-3)$, $\vec{b} = (2,-4,6)$ $\Rightarrow$ $\vec{b} = -2.\vec{a}$ $\Rightarrow$ **závislé vektory**

- Vzdálenost bodu od přímky:
  $v(A,p) = \frac{|a \cdot a_x + b \cdot a_y + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, kde obecná rovnice přímky p je $ax + by + c = 0$ a bod A má souřadnice a_x, a_y

2. **Přímka:**

- Parametrická rovnice přímky:



<u>Parametrická rovnice přímky</u>

určené bodem A a nenulovým směrovým vektorem $\vec{s}$:

$$X = A + t.\vec{s},\ t \in R \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= x_A + t.s_1 \\ y &= y_A + t.s_2 \quad t \in (-\infty, \infty) \\ z &= z_A + t.s_3 \end{aligned}$$

<u>Poznámka</u>: Jedna přímka má nekonečně mnoho tvarů rovnic závislých na volbě bodu a směrového vektoru.

<u>Příklad 1</u>: $m \equiv AB,\ A[1,-1,2],\ B[3,3,0]$

$\boldsymbol{X = [1,-1,2] + (2,4,-2)t,\ t \in (-\infty,+\infty)}$

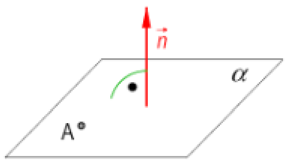
$X = [1,-1,2] + (1,2,-1)t,\ t \in (-\infty,+\infty)$

<u>Příklad 2</u>: rovnice úsečky AB, polopřímky AB

- Obecná rovnice přímky v rovině:
  $ax + by + c = 0$, kde $\vec{n} = (a, b)$ je normálový vektor
- Směrnicová rovnice přímky v rovině:
  $y = kx + q$, kde $k = tg\alpha = s_2/s_1$ je směrnice dané přímky a $\vec{s} = (s_1, s_2)$ je její směrový vektor

3. **Rovina:**

- Obecná rovnice roviny:



<u>Obecná rovnice roviny α</u>

$a.x + b.y + c.z = d$, $(a,b,c) = \vec{n}$ je normálový vektor roviny $\boldsymbol{\alpha}$

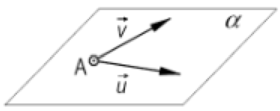
<u>Příklad 1</u>: $\boldsymbol{\alpha} \equiv A[1,2,-1], \vec{n}(2,-1,3)$

$\boldsymbol{\alpha}:\ 2x - y + 3z = -3$

<u>Příklad 2</u>: $\boldsymbol{\alpha} \equiv A[0,-1,1], B[1,0,2], C[1,1,5]$

$(\vec{B} - \vec{A})x(\vec{C} - \vec{A}) = (2,-3,1)$, $\boldsymbol{\alpha}:\ 2x - 3y + z = 4$

- Parametrická rovnice roviny:



<u>Parametrická rovnice roviny α</u>

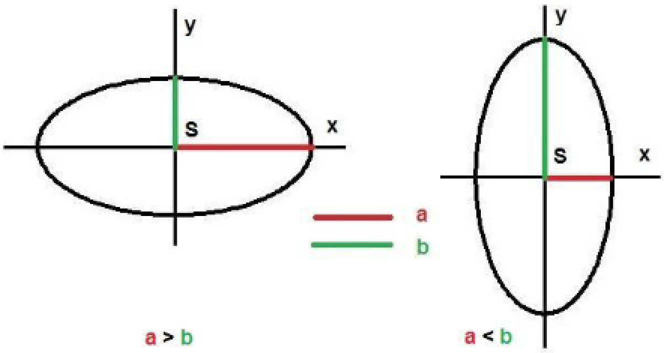
$X = A + t.\vec{u} + w.\vec{v}$, $t \in R, w \in R$

<u>Převod na obecnou rovnici roviny:</u>

$(a,b,c) = \vec{u} \times \vec{v}$, $a.x + b.y + c.z = d$, $d = a.x_A + b.y_A + c.z_A$

4. **Kuželosečky:**

- Elipsa:



$a > 0 \rightarrow$ velikost poloosy ve směru osy x

$b > 0 \rightarrow$ velikost poloosy ve směru osy y

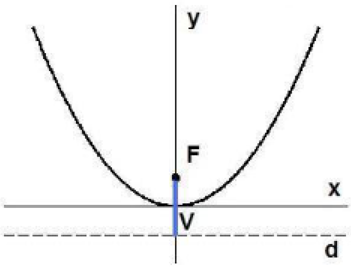
vrcholy: $[a, 0], [-a, 0], [0, b], [0, -b]$

v posunuté poloze (střed $S = [m, n]$) $\rightarrow$ $\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1}$

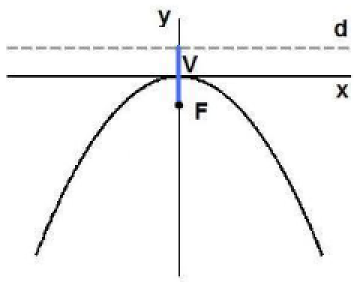
- Parabola:
  parametr $p > 0$

ohnisko: $F = \left[0, \pm\frac{p}{2}\right]$ nebo $F = \left[\pm\frac{p}{2}, 0\right]$

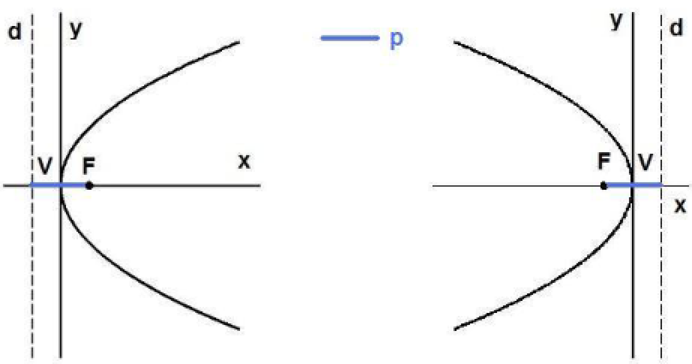
řídící přímka: $y = \pm\frac{p}{2}$ nebo $x = \pm\frac{p}{2}$



$x^2 = +2py$



$x^2 = -2py$



$y^2 = +2px$ $\qquad$ $y^2 = -2px$

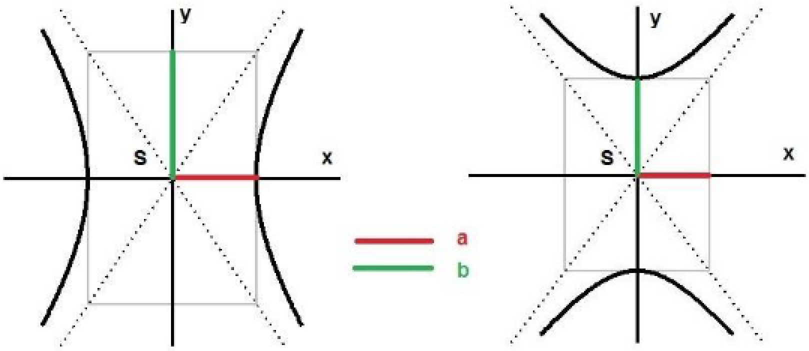
v posunuté poloze (vrchol $V = [m, n]$) $\rightarrow$

$\boxed{(x-m)^2 = \pm 2p(y-n)}$ nebo $\boxed{(y-n)^2 = \pm 2p(x-m)}$

- Hyperbola:
  $a > 0 \rightarrow$ velikost poloosy ve směru osy x
  $b > 0 \rightarrow$ velikost poloosy ve směru osy y

  vrcholy: $[a, 0], [-a, 0], [0, b], [0, -b]$

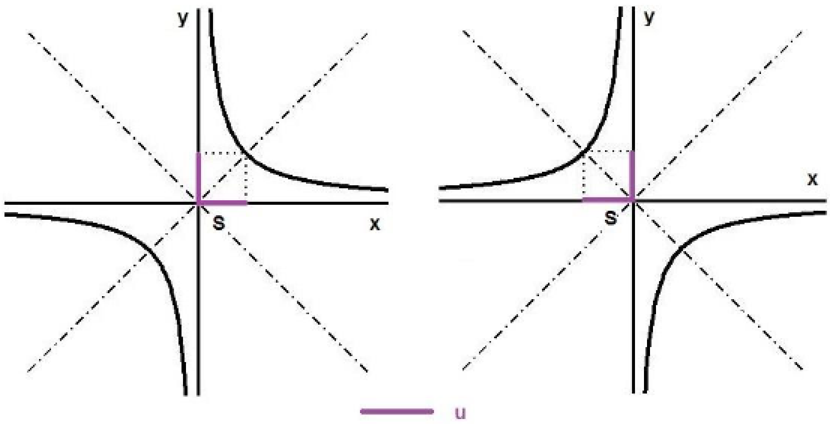
  asymptoty: $y = \pm\frac{b}{a}x$



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = +1$ $\qquad$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

v posunuté poloze (střed $S = [m, n]$) $\rightarrow$ $\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = \pm 1}$

- Rovnoosá hyperbola:
  koeficient $k > 0$
  hlavní vrcholy: $[u, u], [-u, -u]$, $([u, -u], [-u, u])$, kde $u = \sqrt{k}$
  asymptoty: $y = 0, x = 0$; osy: $y = \pm x$



$y = +\frac{k}{x}$ $\qquad$ $y = -\frac{k}{x}$

v posunuté poloze (střed $S = [m, n]$) $\rightarrow$ $\boxed{y - n = \pm\frac{k}{x-m}}$

Videa z lekcí najdete na
https://fs.cvut.cz/pripravny-kurz-z-matematiky/

Dotazy, názory, připomínky, přání pište na
ludek.benes@fs.cvut.cz