PŘÍPRAVNÝ KURZ NA MATURITU Z MATEMATIKY

Fakulta strojní ČVUT v Praze 2025

Lekce 4
Goniometrické funkce a rovnice

Příklady

Příklad 1

Pro $x \in \langle \pi; 2\pi \rangle$ platí:

$\cos x = -\frac{1}{2}$

Jaká je hodnota $\mathrm{tg}\, x$ **?**

A) hodnota neexistuje

B) $-\sqrt{3}$

C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

E) $\sqrt{3}$

Příklad 2

Pro $x \in \mathbf{R}$ je dána funkce:

$g: y = \sin\left(x + \frac{7\pi}{6}\right)$

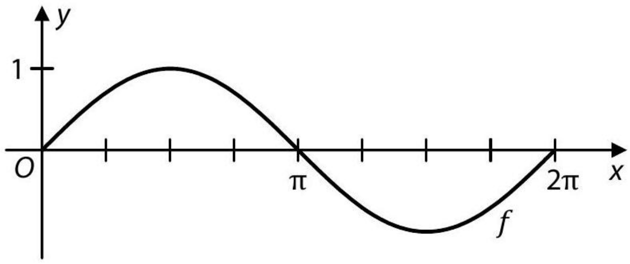
Vypočtěte obě souřadnice průsečíku P **grafu funkce** g **se souřadnicovou osou** y**.**

Určete <u>nejmenší kladné</u> číslo x**, pro které platí:**

$\sin\left(x + \frac{7\pi}{6}\right) = 1$

Příklad 3

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestrojen graf funkce $f: y = \sin x$ pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.



Vypočtěte všechny hodnoty proměnné $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, pro něž je $f(x) = -0{,}5$.

Příklad 4

V intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ řešte:

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sin x}{\cos x} = -1$$

Příklad 5

$\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x$

$\cos 2x + 1$

$$\frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$$

Pro $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ přiřaďte ke každému výrazu jeho ekvivalentní vyjádření:

A) $\sin^2 x$

B) $\cos^2 x$

C) $2 \cdot \sin x$

D) $2 \cdot \sin^2 x$

E) $2 \cdot \cos^2 x$

Goniometrické funkce

Určete (zjednodušte) dané výrazy. Určete pro jaká x mají smysl:

Příklad 1

$$\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} \qquad \left[1 - \sin x,\ x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right]$$

Příklad 2

$$\operatorname{cotg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \qquad \left[\frac{1}{\sin x},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right]$$

Příklad 3

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} \qquad \left[1,\ x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right]$$

Příklad 4

$-\sin(2\pi - x)$ $[\sin x, x \in \mathbf{R}]$

Příklad 5

$\operatorname{cotg}\frac{x}{2} \cdot \sin^2\frac{x}{2}$ $\left[\frac{1}{2}\sin x,\ x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right]$

Goniometrické rovnice

V oboru R řešte dané rovnice:

Příklad 1

$\sin^2 x - \sin x = 0$ $\left[x = k\pi,\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right]$

Příklad 2

$\cos^2 x - \sin^2 x = 1$ $[x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}]$

Příklad 3

$\sin 2x = \operatorname{cotg} x$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right]$

Příklad 4

$\cos^2 x - \cos x = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right]$

Příklad 5

Na intervalu $\langle 0; 2\pi\rangle$ nelezněte všechna řešení rovnice:

$\sin x - \sin 2x + 2 \cdot \cos x - 1 = 0$ $\left[x_1 = \frac{\pi}{3},\ x_2 = \frac{\pi}{2},\ x_3 = \frac{5}{3}\pi\right]$

Příklad 6

$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x - 2 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right]$

Příklad 7

$\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$ $[x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}]$

Příklad 8

$\sin^2 x + 2\sin x = 0$ $[x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}]$

Příklad 9

$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1}{3}$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right]$

Příklad 10

$\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} = 2 - \sqrt{3}$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right]$

Příklad 11

$\operatorname{tg} x \cdot (\sin x - 1) = \frac{1}{2\cos x} - \cos x$ $\left[x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right]$

Příklad 12

$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\left[x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right]$

Příklad 13

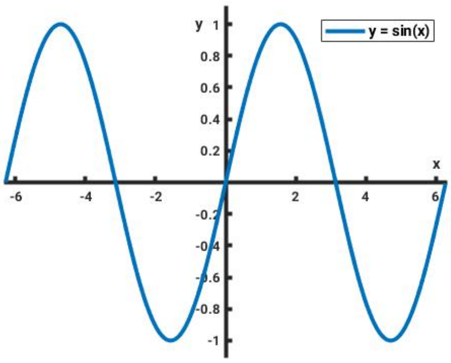
$\sin 2x = \cos 3x \sin 2x$ $\left[x = k\frac{\pi}{2},\ x = \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right]$

Funkce

- Sinus

$y = \sin x$, perioda: $p = 2\pi$

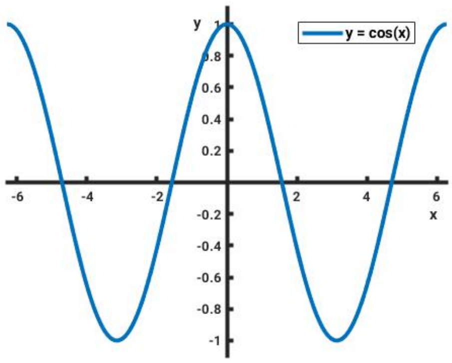
$D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \langle -1, 1 \rangle$



- Kosinus

$y = \cos x$, perioda: $p = 2\pi$

$D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \langle -1, 1 \rangle$

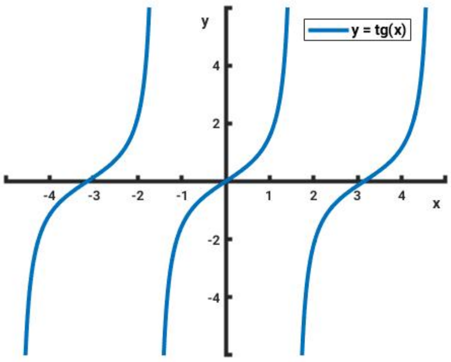


- Tangens

$y = \operatorname{tg} x$, perioda: $p = \pi$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, \ k \in \mathbb{Z}$

$H(f) = \mathbb{R}$

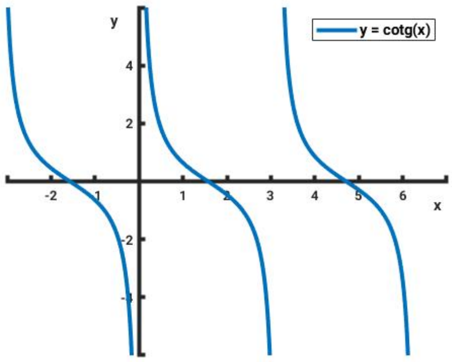


- Kotangens

$y = \operatorname{cotg} x$, perioda: $p = \pi$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, \ k \in \mathbb{Z}$

$H(f) = \mathbb{R}$



Vybrané vzorce

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$