

PŘÍPRAVNÝ KURZ NA MATURITU Z MATEMATIKY

Fakulta strojní ČVUT v Praze 2025

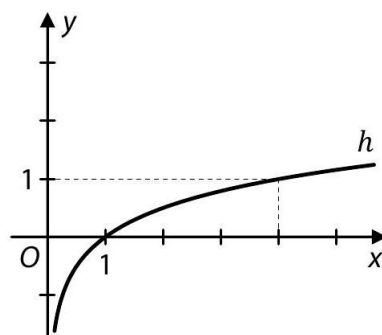
Lekce 3

Logaritmus, exponenciála - funkce, výrazy, rovnice

Příklady

Příklad 1

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestaven graf logaritmické funkce $h: y = \log_a x$, jejímž definičním oborem je interval $(0; +\infty)$.

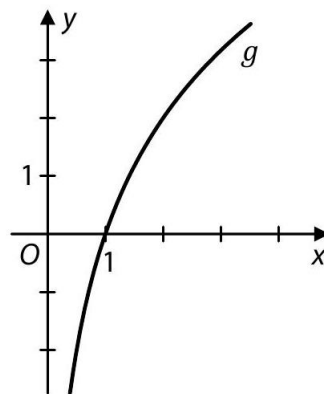


Určete základ a logaritmické funkce h . Dále určete hodnotu proměnné x , pro kterou $h(x) = 3$.

Příklad 2

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestaven graf funkce $g: y = \log_a x$ s definičním oborem $(0; +\infty)$, pro kterou platí:

$$\log_a 2 = 2$$



Která z následujících rovností platí pro funkci g ?

- A) $\log_a \sqrt{2} = \sqrt{2}$
- B) $\log_a \sqrt{8} = \sqrt{8}$
- C) $\log_a 4 = 4$
- D) $\log_a 8 = 8$
- E) žádná z uvedených rovností

Příklad 3

V oboru \mathbf{R} řešte:

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{x+2} \cdot \frac{2^x}{3^x} = \frac{3}{2}$$

Příklad 4

Pro všechna $x \in \mathbf{R}$ a kladnou konstantu a platí:

$$16a^{x+1} = 4a^x$$

Vypočtěte hodnotu konstanty a .

Vypočtěte hodnotu a^x , jestliže $x = -\frac{1}{2}$.

Příklad 5

V oboru \mathbf{R} řešte:

$$2^{5x} - \log_5 \sqrt{5} = 0$$

Příklad 6

Předpis funkce f definované pro všechna přípustná $x \in \mathbf{R}$ je:

$$y = \log_{10}(8 - 2x) - \log_{10}(2 - x)$$

Určete všechna $x \in \mathbf{R}$, pro která je hodnota funkce f rovna 1.

Příklad 7

Předpis funkce f , definované pro všechna $x \in \mathbf{R}$, je

$$y = 5^{x-1} - 5^{x-2}$$

Určete všechna $x \in \mathbf{R}$, pro která je hodnota funkce f rovna 20.

Příklad 8

V oboru \mathbf{R} řešte:

$$\log_{10}(-2x) = 0$$

$$\log_{10} 10^x + x \cdot \log_{10} 1 = \log_{10} 1000$$

$$2^x : 32^{0,5} = \sqrt[3]{32}$$

$$2^{-x} + 2 = 0$$

Logaritmus - výrazy

Určete hodnoty logaritmické funkce:

Příklad 1

$$\log(1) \quad [0]$$

Příklad 2

$$\ln(0) \quad [-]$$

Příklad 3

$$\log_5(5) \quad [1]$$

Příklad 4

$$\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) \quad [-2]$$

Určete výraz V , je-li dán jeho logaritmus:

Příklad 5

$$\ln V = \ln 4 - \ln 3 + \ln \pi + 3 \ln r \quad \left[V = \frac{4}{3}\pi r^3\right]$$

Příklad 6

$$\log_2 V = 3 \log_2 x + (n + 3) \log_2 y - 3 \quad \left[V = \frac{x^3 y^{n+3}}{8}\right]$$

Příklad 7

$$\log_a V = \frac{3}{4} \log_a(x + 2) - 2 \log_a y \quad \left[V = \sqrt[4]{(x + 2)^3 / y^2}\right]$$

Příklad 8

$$\log_5 V = 2 \log_5(x - 2) + 3 \log_5(x + 2) - 2 \log_5(x^2 - 4) \quad [V = x + 2]$$

Logaritmické a exponenciální rovnice

V oboru \mathbb{R} řešte dané rovnice. Proveďte zkoušku:

Příklad 1

$$3^x = 81 \quad [x = 4]$$

Příklad 2

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 16 \quad [x = -2]$$

Příklad 3

$$\sqrt{128} = 8^x \quad [x = 7/6]$$

Příklad 4

$$5^{x^2-2} \cdot 5^{3x+4} = 1 \quad [x_1 = -1, x_2 = -2]$$

Příklad 5

$$x^2 e^x + 3x e^x - 4e^x = 0 \quad [x_1 = 1, x_2 = -4]$$

Příklad 6

$$e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad [x = 1]$$

Příklad 7

$$\ln(\sqrt{x}) = -2 \quad [x = 1/e^4]$$

Příklad 8

$$\ln(x + 1) = 0 \quad [x = 0]$$

Příklad 9

$$2 \ln x - 1 = 0 \quad [x = \sqrt{e}]$$

Příklad 10

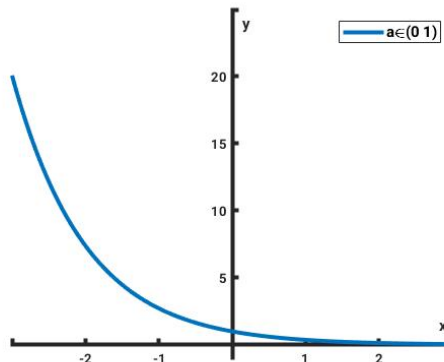
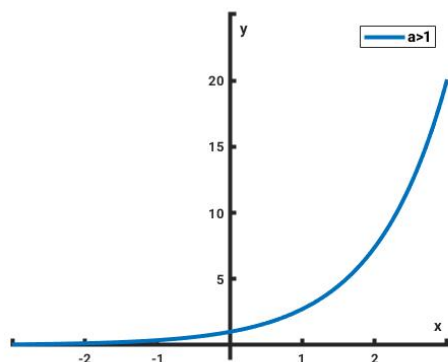
$$2x + 3x \ln x = 0 \quad \left[x = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}\right]$$

Vzorce

- Exponenciální funkce

$$y = f(x) = a^x \quad a > 0, a \neq 1$$

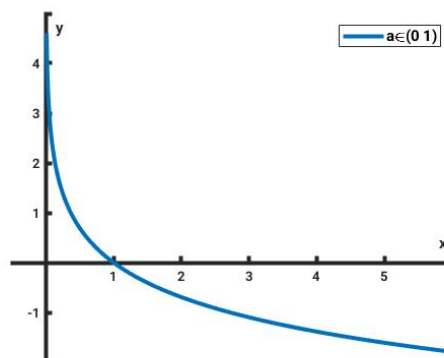
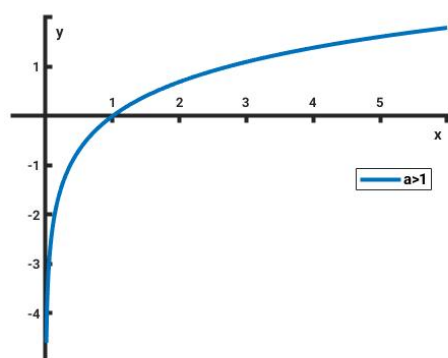
$$D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = (0, \infty)$$



- Logaritmická funkce

$$y = f(x) = \log_a x \quad a > 0, a \neq 1$$

$$D(f) = (0, \infty), \quad H(f) = \mathbb{R}$$



$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad \log_a \frac{1}{a} = -1, \quad a > 1$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$$

$$k \cdot \log_a b = \log_a b^k$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$x = a^{\log_a x}$$

Videa z lekcí najdete na

<https://fs.cvut.cz/pripravny-kurz-z-matematiky/>

Dotazy, názory, připomínky, přání pište na

ludek.benes@fs.cvut.cz