FAKULTA STROJNÍ ČVUT V PRAZE

PŘÍPRAVNÝ KURZ NA MATURITU Z MATEMATIKY

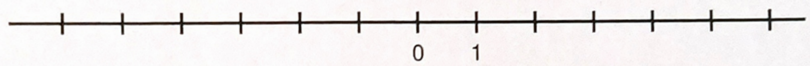
Fakulta strojní ČVUT v Praze 2025

Lekce 1
Množiny, algebraické výrazy a jejich úpravy

Základní množiny - příklady

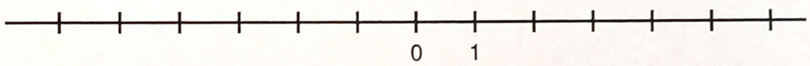
Příklad 1

Na číselné ose vyznačte interval $\langle 2-n;\ n-3)$ pro $n = 5$.



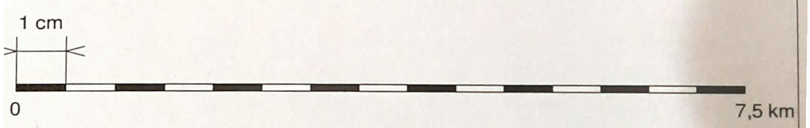
Příklad 2

Najděte nejmenší přirozené číslo n, pro které existuje interval $\langle 2-n;\ n-3)$, a tento interval vyznačte na číselné ose.



Příklad 3

U mapy je grafický převod vzdálenosti na mapě a ve skutečnosti.



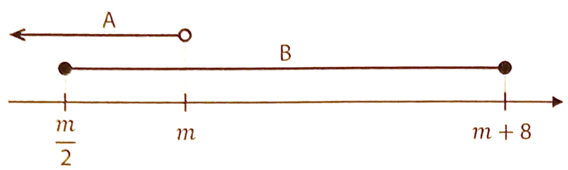
Měřítko mapy se vyjadřuje ve tvaru $1 : x$, tedy 1 cm na mapě představuje x cm ve skutečnosti.

Uveďte měřítko mapy.

Příklad 4

Na číselné ose jsou znázorněny intervaly A, B.

Platí: $A \cup B = (-\infty; 14\rangle$



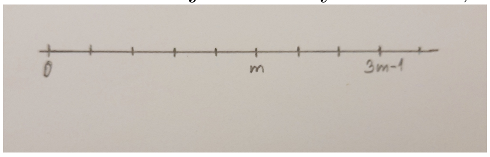
Zapište množinu B jako interval. Meze uveďte čísly, nesmí obsahovat m.

Příklad 5

M je množina všech reálných čísel, které splňují zároveň dvě podmínky:
- číslo je menší než 4,
- absolutní hodnota čísla je větší nebo rovna 4.

Množinu M zapište intervalem.

Příklad 6
Na číselné ose jsou obrazy tří čísel:0, m, 3m-1. Vyznačené dílky jsou stejně dlouhé.



Vyjádřete poměr $m:(3m-1)$
Na číselné ose vyznačte a popište obraz čísla 1.

Příklad 7
Jsou dány intervaly
$A=<2n,97>$ $\qquad B=<-17,3n>$
kde $n \in N$. V intervalu A i B leží stejný počet celých čísel. Určete číslo n. $\qquad [n=16]$

Příklad 8
Objem koule je $x\ dm^3$ a povrch této koule je $y\ dm^2$, přičemž $x=y$.
Určete poloměr koule. Výsledek uveďte v dm. $\qquad [r=3\,dm]$

Algebraické výrazy - logaritmus a exponenciála

Příklad 1
Vypočtěte
$\left[10^4-(8\cdot 10^4-73\cdot 10^3)\right]^2$ $\qquad [9\cdot 10^6]$

Příklad 2
Upravte na mocninu se základem 9
$81^{90}\cdot 3^{300}$ $\qquad [9^{330}]$

Příklad 3
Pro $a>0$ proveďte a zjednodušte
$\frac{a^3}{2^2}-\left(\frac{2}{a}\right)^{-3}$ $\qquad \left[\frac{a^3}{8}\right]$

Příklad 4
Předpis funkce f, definované pro všechna $x\in R$, je
$y=5^{x-1}-5^{x-2}$
Určete všechna $x\in R$, pro která je hodnota funkce f rovna 20. $\qquad [6d^2]$

Příklad 5
Pro všechna $x\in R$ a kladnou konstantu a platí
$16a^{x+1}=4a^x$
- Vypočtěte hodnotu konstanty a.
- Vypočtěte a^x, pokud $a=-\frac{1}{2}$. $\qquad [a=\frac{1}{4}, a^{-\frac{1}{2}}=2]$

Příklad 6
Pro $a\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$ vypočítejte
$\log_a\frac{8}{\sqrt{a}}-\log_a 8a=$ $\qquad [-\frac{3}{2}]$

Příklad 7
Předpis funkce f, definované pro všechna přípustná $x\in R$, je
$f(x)=\log_4(2x+1)$
- Určete definiční obor funkce f. Zapište ho pomocí intervalu.
- Určete všechna $x\in R$, pro která je hodnota funkce f rovna $\frac{-1}{2}$. $\qquad [x\in(-\frac{1}{2},\infty),\ x=-\frac{1}{4}]$

Algebraické výrazy - úpravy zlomky, mocniny

Příklad 1
Pro $d\geq 0$ zjednodušte
$\sqrt{2d^3}\cdot\sqrt{18d}$ $\qquad [6d^2]$

Příklad 2
Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{\mathbf{-2, 0}\}$ zjednodušte
$\frac{(x-2)(x+4)}{x+2} : x^2 + \frac{\frac{8}{x+2}}{x^2}$ $\left[\frac{1}{x}\right]$

Příklad 3
Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{\mathbf{-3, 0, 3}\}$ zjednodušte
$\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2-3x}\right) : \frac{1}{x^2-9}$ $[x+3]$

Příklad 4
Pro $x \in R \setminus \{-3, 0, 3\}$ zjednodušte
$\left(\frac{6}{x^2-3} - \frac{12}{x^2-9}\right) : \frac{3}{x^2+3x}$ $[-2]$

Příklad 5 - FS
Upravte, u výrazu udejte kdy má smysl.
$\left(\frac{x-1}{x-2} - \frac{x}{x-1}\right)\left(x - \frac{3x}{x+1}\right)$ $\left[\frac{x}{x^2-1}\right]$ $x \neq \pm 1, x \neq 2$

Příklad 6 - FS
Upravte, u výrazu udejte kdy má smysl.
$\left(-\frac{16}{5}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{\frac{64}{25}}{2 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}}$ $[0]$

Příklad 7 - FS
Upravte, u výrazu udejte kdy má smysl.
$(p+q) : \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$ $[pq, p \neq 0, q \neq 0, p+q \neq 0]$

Příklad 8
Pro $a \in \mathbf{R}$ je dán výraz
$\frac{a - \frac{1}{a}}{1-a^2}$
- Výraz zjednodušte. $[-\frac{1}{a}]$
- Určete, pro která a má smysl. $[a \neq -1, 0, 1]$

Příklad 9
Jsou dány dva výrazy $\frac{x}{x+1}, \frac{-1}{x^2+x}$ s proměnnou $x \in \mathbf{R}$. Rozhodněte o každém z následujících tvrzení, zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE)

- Pro $x = -1$ má první z obou výrazů smysl.
- Pro $x = 1$ má druhý z obou výrazů smysl.
- Společný jmenovatel obou výrazů může být $x^2 + x$.
- Pro kladné hodnoty proměnné x je součet obou výrazů roven $\frac{x-1}{x}$

[NE, ANO, ANO, ANO]

Algebraické výrazy - rovnice

Příklad 1
V oboru $\mathbf{R}$ řešte rovnici
$\frac{x+10}{x} + \frac{100}{10x-x^2} = \frac{x+20}{x-10}$ $[x = -10, x \neq 0, 10]$

Příklad 2
V oboru $\mathbf{R}$ řešte rovnici
$5 + \frac{3}{3u-12} = \frac{5u}{u-4}$ [nemá řešení]

Příklad 3
V oboru **R** řešte rovnici
$\frac{1}{5}\frac{x-3}{x}+\frac{1}{2}\frac{x}{x-1}=\frac{3}{4}$ $\qquad [x=-4,\ x=3]$

Příklad 4
V oboru **R** řešte rovnici
$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x}-1$ $\qquad$ [nemá řešení]

Příklady s algebraickými výrazy, procenta

Příklad 1
Lukáš si na internetové televizi zaplatil sledování všech dílů oblíbeného seriálu. První týden viděl 40 % všech dílů seriálu, druhý týden $\frac{3}{8}$ všech dílů seriálu a třetí týden mu zbývalo zhlédnout ještě posledních 9 dílů do konce seriálu.
Kolik dílů celkem měl seriál, který Lukáš sledoval? [40]

Příklad 2
Rozpuštěním 2 gramů účinné látky ve vodě jsme vytvořili roztok. Hmotnost účinné látky tvoří 5% hmotnosti roztoku. Vypočtěte, v kolika gramech vody jsme účinnou látku rozpustili. [$38g$]

Příklad 3
Čištění kapaliny probíhá ve třech fázích. Druhá fáze trvá o třetinu déle než první fáze a třetí fáze trvá dvakrát déle než druhá fáze. Vypočítejte, kolik procent z celkové doby čištění zabere první fáze.

[20%]

Příklad 4
Jedna strana obdélníku je o pětinu kratší než strana čtverce a obsahy obou těchto útvarů jsou stejné. Délku strany čtverce označíme a. Vyjádřete délku delší strany obdélníka v závislosti na veličině a. [$\frac{5}{4}a$]

Příklad 5
Pouze pětina vyprodukovaných PET lahví se nevytřídí. Z vytříděných PET lahví se 70% recykluje. (Nevytříděné lahve se nerecyklují.)
Vypočítejte, kolik procent vyprodukovaných PET lahví se recykluje. [56%]

Příklad 6
Firma utržila v únoru pouze čtyři pětiny toho, co utržila v lednu. Určete, o kolik procent více utržila firma v lednu než v únoru. [o 25%]

Příklad 7
Každý kůň spotřebuje za den stejnou dávku krmiva.
Chovatel měl pro svých deset koní krmivo na 80 dní. Z tohoto krmiva prodal farmářce takové množství, které spotřebují její čtyři koně za 25 dní. Zbytek krmiva si ponechal. Za každou denní dávku krmiva pro jednoho koně zaplatila farmářka chovateli 50 korun.

- Kolik korun zaplatila farmářka chovateli za krmivo? [5000]
- Za kolik dní spotřebují chovatelovi koně krmivo, které mu zbylo? [70]

Příklad 8
Matěj si na začátku srpna připravil částku, ze které po celý srpen platil všechny výdaje. Ve skutečnosti z ní utratil 15 % za jídlo, nájemné ho stálo o 200 % více než jídlo a za dopravu vydal o 60 % méně než za nájemné. Jiné výdaje Matěj v srpnu neměl, a zbytek připravené částky tedy uspořil. Vypočítejte, kolik procent částky připravené na srpen Matěj uspořil. [22%]

Videa z lekcí najdete na https://fs.cvut.cz/pripravny-kurz-z-matematiky/	Dotazy, názory, připomínky, přání pište na ludek.benes@fs.cvut.cz

Základní množiny

Přirozená čísla - N **1, 2, 3 ... celá kladná čísla, 0 sem nepatří**
Celá čísla - Z **-3, -2, -1 ,0 ,1 ,2 ,3**
Racionální čísla $\frac{-2}{5}, \frac{123}{68}, \frac{-256452}{23458}$**... dají se vyjádřit zlomkem**
Reálná čísla - R $\frac{26}{37}, \sqrt{2}$**... všechna běžná čísla (nepatří sem** $\pm\infty$**)**

Vzorce

• úpravy zlomků

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{6}{4}} = \frac{2\cdot4}{3\cdot6} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1+3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

rozhodně ne $\frac{4}{1+3} \neq \frac{4}{1} + \frac{4}{3}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} + \frac{6}{8} = \frac{1\cdot8+6\cdot4}{4\cdot8} = \frac{32}{32} = 1$$

• mocniny

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b} \quad \Rightarrow \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b} \quad \Rightarrow \quad 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = 2^3 = 8$$

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c} \quad \Rightarrow \quad 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$$

$$(a^b)^c = a^{b\cdot c} \quad \Rightarrow \quad (2^2]^3 = 2^{2\cdot3} = 2^6 = 64$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \Rightarrow \quad 9 - x^2 = (3-x)(3+x)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \Rightarrow \quad (2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

• logaritmy

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x \quad a \in R^+ \setminus \{1\}$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$x \log_a y = \log_a y^x \quad \Rightarrow \quad 2\log_a 3 = \log_a 3^2 = \log_a 9, \quad -\log_a 3 = \log_a 3^{-1} = \log_a \frac{1}{3}$$

$$\log_a 1 = 0$$

Videa z lekcí najdete na
https://fs.cvut.cz/pripravny-kurz-z-matematiky/

Dotazy, názory, připomínky, přání pište na
ludek.benes@fs.cvut.cz