

Úloha 21

Měření ohniskových vzdáleností

Geometrická optika

Optické zobrazení je vzájemně jednoznačné přiřazení předmětu a obrazu. To znamená, že bodu, přímce a rovině předmětového prostoru je zobrazením jednoznačně přiřazen sdružený bod, sdružená přímka a sdružená rovina obrazového prostoru. Takové zobrazení se nazývá **kolineární**.

Optický obraz je geometrický útvar vytvořený optickým zobrazením předmětu optickou soustavou. V prvním přiblížení se vyšetřuje zobrazení v blízkém okolí optické osy.

Předmětový prostor je poloprostor před optickou soustavou, v němž může ležet předmět.

Obrazový prostor je prostor, v němž může ležet obraz předmětu.

Ohniska

Předmětové ohnisko F je bod na optické ose soustavy v předmětovém prostoru, v němž se protínají paprsky, které po výstupu ze soustavy jsou rovnoběžné s optickou osou. **Obrazové ohnisko** F' je bod, v němž se protínají paprsky, které před vstupem do soustavy jsou rovnoběžné s optickou osou.

Ohniskové roviny

Obrazová ohnisková rovina φ' (**předmětová ohnisková rovina** φ) je rovina kolmá na optickou osu, kterou protíná v obrazovém (v předmětovém) ohnisku F' (F). Zobrazují se v ní body předmětového prostoru, které jsou nekonečně vzdálené. (Body předmětového prostoru ležící v rovině φ se zobrazují v obrazovém prostoru v nekonečnu).

Ohnisková vzdálenost

Hlavní rovina předmětová χ **hlavní rovina obrazová** χ' jsou navzájem sdružené roviny kolmé k ose, jež odpovídají dvojicím sdružených bodů, pro něž je příčné zvětšení $Z = 1$ (úsečka délky y kolmá k optické ose v hlavní rovině χ předmětového prostoru se zobrazí v hlavní rovině χ' jako stejně dlouhá úsečka směřující na touž stranu, tedy $y = y'$). **Předmětový** H je průsečík hlavní roviny předmětové χ s optickou osou, **hlavní bod obrazový** H' je průsečík hlavní roviny obrazové χ' s optickou osou.

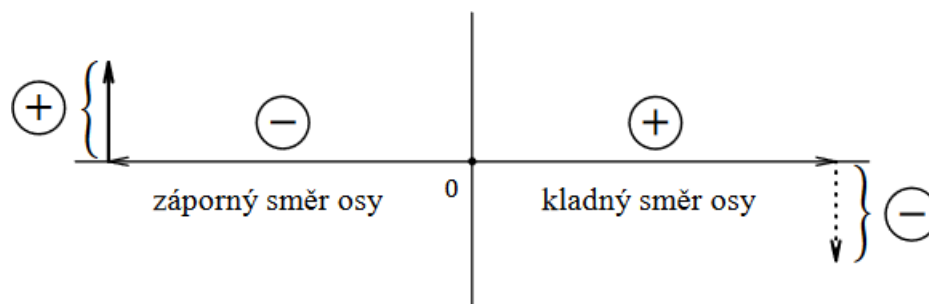
Předmětová f je vzdálenost předmětového ohniska F od předmětového hlavního bodu H optické soustavy.

Obrazová ohnisková vzdálenost f' je vzdálenost obrazového ohniska F' od obrazového hlavního bodu H' optické soustavy.

Znaménková konvence

Důležitou součástí studia optických zobrazení je zavedení znaménkové konvence. Jak z názvu „konvence“ vyplývá, jde o určitou dohodu, volbu, která ale musí být poté dodržována. V našem případě budeme používat následující znaménkovou konvenci (obr. 1)

- Světlo (paprsek) vstupuje do soustavy zleva doprava a tento směr považujeme za **kladný**.
- Každá vzdálenost na optické ose se měří od přesně určeného bodu (vrcholu zrcadla, středu optické soustavy) a je **kladná**, je-li směr od bodu, od něhož ji měříme k druhému bodu stejný se zvoleným kladným směrem os. Jsou-li tyto směry navzájem opačné, je příslušná vzdálenost **záporná**.
- Orientovaná výška předmětu se značí y , orientovaná výška jeho obrazu y' . Měříme je od optické osy (na níž předmět stojí) ke konci předmětu. Leží-li koncový bod předmětu (nebo jeho obrazu) nad optickou osou, je jeho orientovaná výška **kladná**, leží-li pod optickou osou, je jeho orientovaná výška **záporná**.



Obr.1 Znaménková konvence

Vlastnosti obrazu

Obraz vzniklý optickým zobrazením může mít vzhledem k zobrazovanému předmětu různé vlastnosti. Říkáme, že obraz je:

Skutečný × neskutečný

V případě, že paprsky se po průchodu optickou soustavou sbíhají, vzniká v průsečíku paprsků **skutečný (reálný) obraz**. Takový obraz lze zachytit na stínítko nebo na jiný předmět. Vytváří-li optická soustava rozbíhavý svazek paprsků, není možné zachytit obraz daného bodu na stínítko a skutečný obraz nevzniká. Obraz ale můžeme pozorovat okem v průsečíku, který vznikne zpětným prodloužením rozbíhavých paprsků. V tomto případě vzniká **zdánlivý (neskutečný) obraz**. Neskutečný obraz není možné zachytit na stínítko.

Zmenšený × zvětšený

Definujeme **příčné zvětšení m** jako poměr příčné délky obrazu y' k příčné délce příslušného předmětu y . Příčné délky jsou délky měřené ve směru kolmém k optické ose.

$$m = \frac{y'}{y} \quad (1)$$

Příčné zvětšení je bezrozměrná veličina a pokud je $|m| > 1$ je obraz **zvětšený**, je-li $|m| < 1$ je obraz **zmenšený**, a pro $|m| = 1$ je stejně velký.

Vzpřímený × převrácený

Je-li $m > 0$, je obraz **vzpřímený** (přímý), je-li $m < 0$, je obraz **převrácený**, tj. úsečka y' směřuje na opačnou stranu od optické osy než úsečka y .

Zobrazení lomem

Optická čočka je tvořena obvykle skleněným prostředím ohraničeným dvěma lámavými plochami ve tvaru kulových rozhraní nebo jedním kulovým a jedním rovinným rozhraním. Zobrazení čočkami se děje lomem světelných paprsků na obou rozhraních čočky.

Zobrazení tenkou čočkou

Je-li tenká čočka obklopena z obou stran prostředím stejného indexu lomu, platí mezi předmetovou vzdáleností a bodu P měřenou na optické ose od předmetového hlavního bodu H, a obrazovou vzdáleností a' bodu P', který je obrazem bodu P, měřenou na optické ose od obrazového hlavního bodu H' vztah:

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'} \quad (2)$$

To je **Gaussova zobrazovací rovnice**. Znaménková konvence byla definována podle obr.1.

Tenké čočky mají tak malou tloušťku d , že ji můžeme pokládat za nulovou. **Ohniskové vzdálenosti f' a f a vzdálenosti předmětu a obrazu a a a' se u tenké čočky měří od jejího středu.**

Příčné zvětšení m je opět poměr příčné délky obrazu y' k příčné délce příslušného předmětu y je rovno:

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{f}{f-a} = \frac{f'-a'}{f'} = \frac{a'}{a}$$

Optická mohutnost (lámavost) D čočky (optické soustavy) je převrácená hodnota její obrazové ohniskové vzdálenosti f'

$$D = \frac{1}{f'}$$

Jednotkou optické mohutnosti je $[D] = \text{m}^{-1} = \text{D} = \text{dioptrie}$.

Druhy čoček

Podle způsobu zobrazení se čočky dělí na dva druhy.

Spojné čočky, spojky - tvoří spojnou soustavu, platí $f' > 0$, $f = -f' < 0$, $D > 0$;

Rozptylné čočky, rozptylky - tvoří rozptylnou soustavu, platí $f' < 0$, $f > 0$, $D < 0$.

Tloušťka d na optické ose je u tenké spojky větší než její tloušťka na okraji, u tenké rozptylky menší než tloušťka na okraji.

Zadání:

- 1) Určete ohniskovou vzdálenost tenké spojky z polohy předmětu a obrazu a určete její nejistotu.
- 2) Určete ohniskovou vzdálenost rozptylky a určete její nejistotu.

Teorie

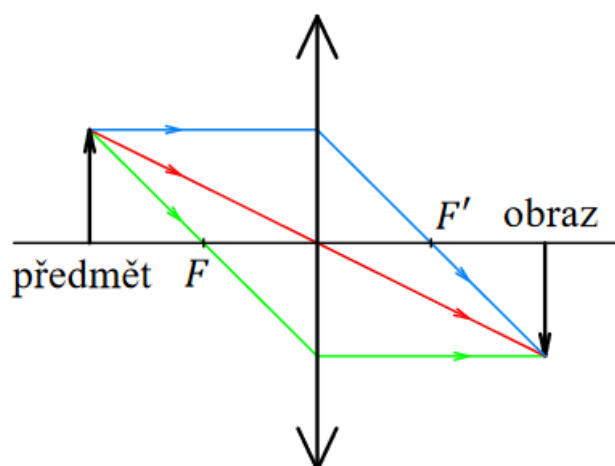
Zobrazení spojkou

Experimentálně i výpočtem lze u lámavých ploch ukázat vlastnosti tří význačných paprsků, které budeme využívat pro konstrukci obrazu. Jsou to:

Paprsky rovnoběžné s hlavní optickou osou, paprsky vycházející z (mířící do) ohniska F a paprsky jdoucí středem čočky (obr.2).

Pro obraz vytvořený **spojnou čočkou**, z rovnice (2) plyne:

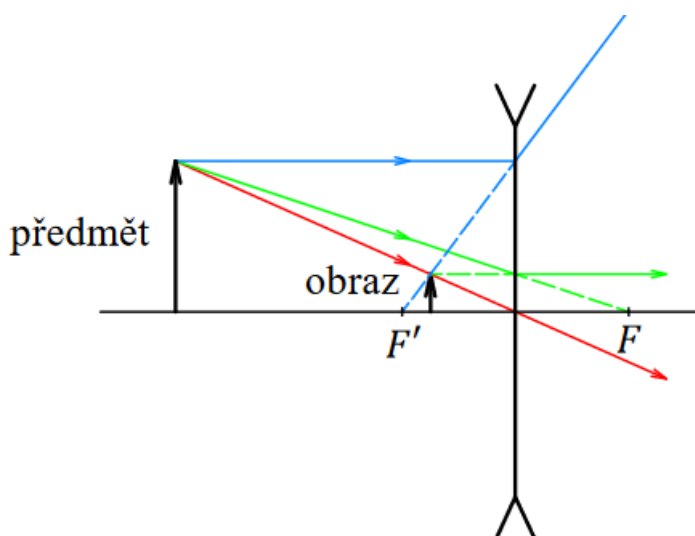
- Je-li předmět mezi nekonečnem a středem křivosti, je skutečný, převrácený a zmenšený obraz mezi středem křivosti a ohniskem.
- Je-li předmět ve středu křivosti, je tam i jeho skutečný, stejný a obrácený obraz. Je-li předmět mezi středem křivosti a ohniskem, je skutečný, převrácený a zvětšený obraz mezi nekonečnem a středem křivosti.
- Je-li předmět mezi ohniskem a vrcholem, je zdánlivý, přímý a zvětšený obraz za zrcadlem.



Obr. 2 Zobrazení spojkou

Zobrazení rozptylkou

Vzhledem k tomu, že ohnisková obrazová vzdálenost rozptylky je záporná, leží obraz na stejné straně od čočky jako předmět a nelze ho zachytit na stínítku. Rozptylka zobrazuje skutečný předmět virtuálně, obraz je tudíž vzpřímený a zvětšený (obr. 3). Měření proto provádíme v kombinaci se spojnou čočkou a využíváme záměny obrazu a předmětu.



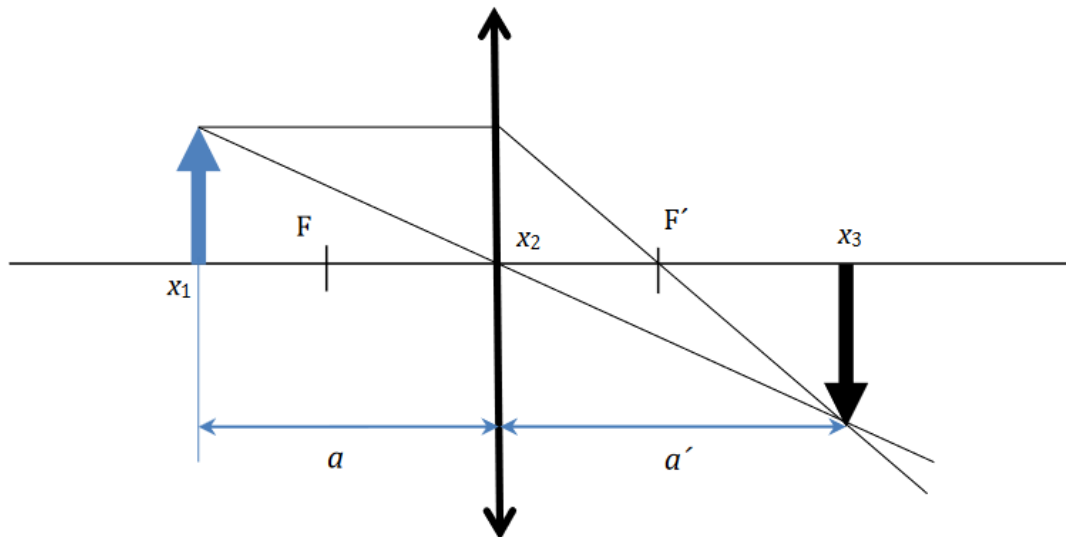
Obr. 3 Zobrazení rozptylkou

Obraz vytvořený **rozptylnou čočkou** je vždy zdánlivý, přímý a zmenšený a leží za čočkou mezi vrcholem V a ohniskem F.

Měření

Pro měření ohniskové vzdálenosti **spojky volíme následující postup** (obr. 4) :

- Zapišeme polohu předmětu x_1 .
- Spojku nastavíme do takové polohy, aby obraz vytvořený na stínítku byl zvětšený. Zapišeme polohu spojky x_2 a předmět i spojku necháme pevně nastaveny.
- Na stínítku zaostříme obraz a zapišeme polohu stínítka x_3 .
- Stínítkem posuneme vpravo, tím obraz rozostříme a znovu zaostříme. Opět zapišeme polohu stínítka x_3 , takto provedeme 5 měření.



Obr. 4 Poloha čočky a stínítka při měření

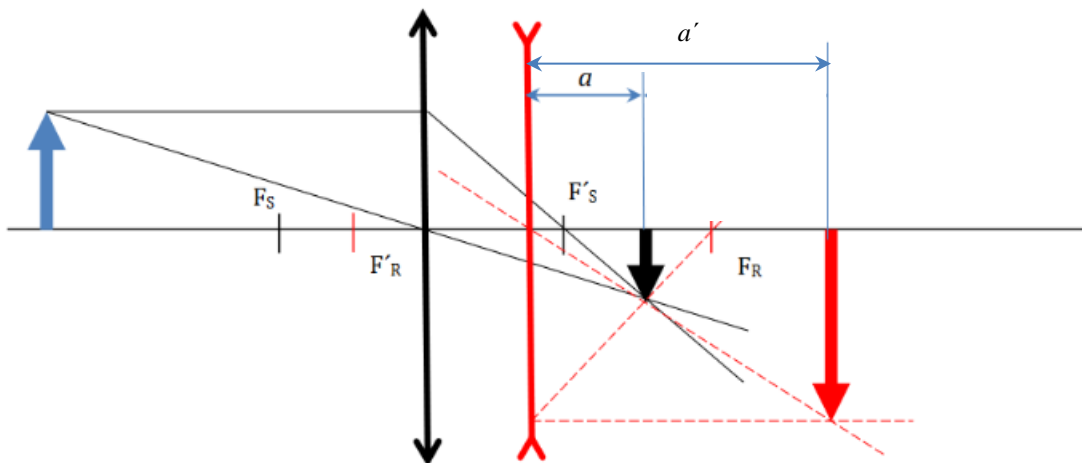
Ohniskovou vzdálenost spojky vypočítáme ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = \frac{a'a}{a-a'} \quad (3)$$

po dosazení polohy předmětu $a = -(x_2 - x_1)$ (podle znaménkové konvence záporná) a polohy obrazu $a' = \bar{x}_3 - x_2$ (podle znaménkové konvence kladná). Obrazová ohnisková vzdálenost f' spojky je kladná.

Pro měření ohniskové vzdálenosti **rozptylky volíme následující postup**, měření provedte pouze jednou.:

- Vytvoříme nejdříve **spojkou reálný ZMENŠENÝ obraz** P' předmětu P (obr. 5).
- Mezi stínítko a spojku vložíme **rozptylku** a **změříme vzdálenost** a mezi rozptylkou a stínítkem (= předmětová vzdálenost pro rozptylku).
- Obraz P' použijeme jako zdánlivý předmět při zobrazení rozptylkou, která ho zobrazí na skutečný.
- Vložíme mezi spojku a stínítko rozptylku a pohybem stínítka (se spojkou nehýbeme) najdeme ostrý obraz P'' (obr. 5).
- Změříme **vzdálenost** a' mezi rozptylkou a polohou obrazu.



Obr. 5 Uspořádání pro měření ohniskové vzdálenosti rozptylky

Indexy S a R jsou označeny ohniskové vzdálenosti spojky, respektive rozptylky. Ohniskovou vzdálenost rozptylky vypočítáme ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = \frac{a'a}{a-a'} \quad (4)$$

po dosazení polohy předmětu a a polohy obrazu a' (**obě podle znaménkové konvence kladné**). Obrazová ohnisková vzdálenost f' **rozptylky je záporná**.

Nejistoty měření

Spojka

- Ke stanovení nejistoty výsledku měření f' aplikujte vztahy pro nejistoty nepřímého měření na rovnici (3). U měření poloh x_1 , x_2 , x_3 a předmětu uvažujte maximální chybu 3 mm s ohledem na odečet polohy.
- Nejistota typu B pro $a = -(x_2 - x_1)$ bude rovna $u_{aB} = \sqrt{u_{x_2B}^2 + u_{x_1B}^2}$, analogicky odvoďte vztah pro nejistotu a' .
- Pro vzdálenost x_3 je třeba uvažovat nejistotu typu A (směrodatná odchylka), která bude rovna i nejistotě typu A pro a' .
- Celková nejistota f' je tedy dána nejistotou typu a i typu B. Vzhledem k tomu, že funkční závislost $f' = f'(a', a)$ je funkcí dvou proměnných, pro výpočet nejistoty nepřímého měření (text “Nejistoty nepřímých měření“, vztah (3)) použijte parciální derivace:

$$\frac{\partial f'}{\partial a} = -\frac{a^2}{(a-a')^2} \qquad \frac{\partial f'}{\partial a'} = \frac{a^2}{(a-a')^2}.$$

Rozptylka

- Obrazová ohnisková vzdálenost rozptylky f' je nepřímo měřená veličina, kterou vypočítáme z přímo měřených poloh předmětu a jeho obrazu. Z charakteru měření vyplývá, že se jedná o standardní nejistotu typu B.
- Ke stanovení nejistoty výsledku měření f' aplikujte vztahy pro nejistoty nepřímého měření na rovnici (4). U měření poloh obrazu a předmětu uvažujte maximální chybu 3 mm s ohledem na odečet polohy.
- Vzhledem k tomu, že funkční závislost $f' = f'(a', a)$ je funkcí dvou proměnných, pro výpočet nejistoty nepřímého měření (text “Nejistoty nepřímých měření“, vztah (3)) použijte parciální derivace:

$$\frac{\partial f'}{\partial a} = -\frac{a^2}{(a-a')^2} \qquad \frac{\partial f'}{\partial a'} = \frac{a^2}{(a-a')^2}.$$