

## Úloha 8

### Určení modulu pružnosti v tahu z rychlosti zvuku

#### Zvukové vlnění

Akustika se zabývá fyzikálními jevy, které jsou spojeny se vznikem akustického (zvukového) vlnění, jeho šířením a vnímáním zvuku sluchem. Frekvence zvukových vln leží přibližně v intervalu 16 Hz až 16000 Hz. Mechanické vlnění s frekvencí menší než 16 Hz se nazývá infrazvuk, s frekvencí větší než 16000 Hz se nazývá ultrazvuk.

Pro rovinnou podélnou vlnu šířící se v prostředí ve směru osy  $x$  má vlnová rovnice tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

kde  $u = u(x, t)$  je výchylka ve směru osy  $x$ . Pro fázovou rychlost  $c$  šíření podélných zvukových vln v pevné látce platí

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (2)$$

kde  $E$  je modul pružnosti v tahu a  $\rho$  je hustota materiálu. Z tohoto vztahu tedy můžeme určit modul pružnosti  $E$ , známe-li fázovou rychlost  $c$  šíření vlnění v pevné látce o známé hustotě  $\rho$ .

Pro fázovou rychlost  $c$  šíření podélných zvukových vln v plynu platí

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (3)$$

kde  $K$  je modul objemové pružnosti. V případě plynů se dá modul objemové pružnosti  $K$  vyjádřit pomocí Poissonovy konstanty  $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_{mp}}{C_{mv}}$  (plyne z termodynamiky) a tlaku plynu a tedy platí

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}. \quad (4)$$

Řešení vlnové rovnice (1) dostaneme rovnicí vlny, která v případě podélného harmonického vlnění šířící se ve směru osy  $x$  má tvar

$$u(x, t) = u_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right), \quad (5)$$

kde  $u(x, t)$  je podélná výchylka objemového elementu prostředí.

Tato výchylka se nazývá akustická výchylka. Objemové elementy prostředí se při vlnění kmitají kolem rovnovážných poloh a mění se rychlost jejich pohybu. Tuto rychlost určíme jako derivaci výchylky podle času a tedy:

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = \omega u_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) = v_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right). \quad (6)$$

**Pozor!** Nezaměňovat tuto rychlost objemového elementu prostředí za fázovou rychlost šíření vlny  $c$  tímto prostředím.

Při šíření vlnění prostředím dochází nejen k podélným výchylkám objemového elementu prostředí, ale také k zhušťování a zředování prostředí, které lze charakterizovat změnami akustického tlaku. Pro průběh akustického tlaku platí:

$$p_a = \rho c \omega u_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) = p_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right), \quad (7)$$
$$p_0 = \rho c \omega u_0.$$

Uvažujme tyč upevněnou v jejím středu, kterou podélně rozkmitáme. V tyči **vznikne stojaté vlnění**, které může mít různé frekvence. Kmitům s nejnižší frekvencí říkáme **základní**, ostatní nazýváme vyšší harmonické kmity.

Při šíření stojatého vlnění prostředím vznikají při skládání přímého a odraženého vlnění **kmitny** (body kmitající s maximální amplitudou výchylky) a **uzly** (body v klidu). Protože střed tyče je upevněn, musí být uzlem stojatého vlnění. Konce tyče jsou volné a budou v nich tedy kmitny. Pro vlnovou délku  $\lambda$  musí být při dané délce tyče  $l$  splněna podmínka

$$l = (2k - 1) \frac{\lambda_k}{2}, \quad (8)$$

kde  $k = 1, 2, \dots$ . Pro frekvenci  $f$  základních kmitů je  $k = 1$  ( $\lambda = 2l$ ) můžeme psát

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2l}. \quad (9)$$

## Zadání

- 1) Pomocí Kundtovy trubice určete vlnovou délku  $\lambda'$  podélných stojatých vln ve vzduchovém sloupci v trubici.
- 2) Určete rychlost šíření podélného vlnění ve zkoumané tyči.
- 3) Vypočítejte modul pružnosti v tahu  $E$  materiálu zkoumané tyče, jeho nejistotu a výsledek porovnejte s tabulkovou hodnotou modulu pružnosti  $E$ .

## Teorie

Pro určení modulu pružnosti  $E$  musíme nejprve znát frekvenci základních kmitů v měřeném materiálu. Tuto frekvenci určíme nepřímo pomocí **Kundtovy trubice**, kde můžeme měřit vlnovou délku stojatých vln ve vzduchovém sloupci díky zviditelnění jeho průběhu. Na obr.1 je schematicky znázorněna Kundtova trubice včetně zobrazení kmiten a uzlů. Tvoří ji tyč délky  $l$  z materiálu, jehož modul pružnosti  $E$  určujeme a vzduchový sloupec délky  $l'$ , které se dotýkají a jejich délky jsou voleny tak, aby v nich mohlo vzniknout stojaté vlnění.

Označme  $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2l}$  frekvenci kmitů v tyči a  $f' = \frac{c'}{\lambda'}$  frekvenci kmitů ve vzduchovém

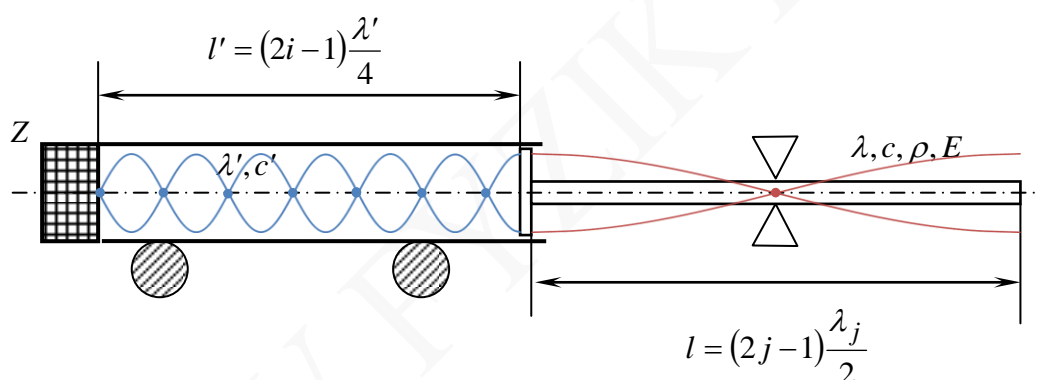
sloupci, kde  $c'$  rychlost šíření zvuku ve vzduchu. Protože obě frekvence musí být stejné, tak po úpravě dostaneme vztah:

$$c = c' \frac{\lambda}{\lambda'} = c' \frac{2l}{\lambda'} \quad (10)$$

Jestliže podélně rozkmitáme měřenou tyč, pak píst upevněný na konci tyče přenesení vlnění i do vzduchového sloupce. V tomto sloupci může vzniknout stojaté vlnění jen tehdy, bude-li na straně pístu kmitna a na druhém konci uzel stojatého vlnění, tedy bude-li délka vzduchového sloupce lichým násobkem  $\frac{\lambda'}{4}$ . Vlnovou délku  $\lambda'$  stojatého vlnění ve vzduchovém sloupci určíme ze vzdálenosti uzlů stojatého vlnění.

Pro modul pružnosti  $E$  pak ze vztahů (2) a (10) platí:

$$E = \rho \left( c' \frac{2l}{\lambda'} \right)^2 \quad (11)$$



Obr. 1 Schéma Kundtovy trubice

## Měření



Obr. 2 Kundtova trubice

- Podélným rozkmitáním měřené tyče rozkmitajte vzduchový sloupec v trubici. Stojaté vlnění v trubici se zviditelní pomocí korkové drtě rovnoměrně rozptýlené v trubici, ve které se rozkmitáním vzduchového sloupce vytvoří výrazné oblasti zhuštění a zředění drtě odpovídající uzlům a kmitnám. Při podélném rozkmitávání tyče se snažíme

posunem pístu dosáhnout co nejlepšího naladění, tzn. nejlépe viditelných kmíten a uzlů.

- Vzdálenost dvou sousedních uzlů je rovna  $\frac{\lambda'}{2}$  a proto můžeme z této vzdálenosti určit  $\lambda'$ . Změřte polohy druhého až  $n$ -tého uzlu ( $y_2, \dots, y_n$ ) vzhledem k prvnímu uzlu. Jedná se o tzv. následná měření.
- Průměrnou vzdálenost dvou uzlů určete z lineární regrese, kde na osu  $x$  zadáte pořadové číslo uzlu a na osu  $y$  naměřené hodnoty  $y_2, \dots, y_n$ . Průměrná vzdálenost dvou uzlů odpovídá směrnici  $a$  lineární závislosti  $y = ax + b$ .
- Rychlost šíření zvuku ve vzduchovém sloupci určete ze vztahu ( $t$  je teplota vzduchu měřena v  $^{\circ}\text{C}$ )

$$c' = [344,3 + 0,62(t - 20)] \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (12)$$

- Vypočtete rychlost šíření podélného vlnění ve zkoumané tyči a modul pružnosti v tahu  $E$  materiálu zkoumané tyče.
- Měřená tyč je vyrobena z mosazi a její hustota je  $\rho = (8600 \pm 300) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

### **Nejistoty měření**

Standardní nejistoty měřených veliči stanovte podle obecných vztahů pro šíření nejistot nepřímo měřené veličiny – podle textu *Chyby a nejistoty měření*.

- Ke standardní nejistotě typu A modulu pružnosti přispívá veličina  $\lambda'$ . Její nejistotu udává její směrodatná odchylka  $u_a$ , kterou určíte z výsledků lineární regrese.
- Nejistotu typu A pak získáme aplikací vztahu pro funkci ve tvaru součinu a podílu, resp. mocniny.
- Zdrojem nejistot typu B jsou veličiny  $\rho$  a  $l$ , nejistotu  $c'$  můžeme oproti ostatním zanedbat. Nejistotu typu B pak získáme aplikací vztahu pro funkci ve tvaru součinu a podílu.

**Literatura:** Kohout Z., Budinská Z., Králová R., Pospíšil J., Bláhová I., Solar M.: *Laboratorní cvičení z fyziky*. 1 vyd. Praha: ČVUT 2003.