

7 Kmitání a vlnění

Kmity, kmitání, oscilace jsou časové změny fyzikální veličiny kolem její určité střední hodnoty. Nejlépe představitelným objektem vykonávající kmitavý pohyb je těleso na pružině. Dalšími příklady jsou např. časové změny polohy částice prostředí, časové změny proudů v elektrických vodičích, změny intenzity elektrického nebo magnetického pole, atd.

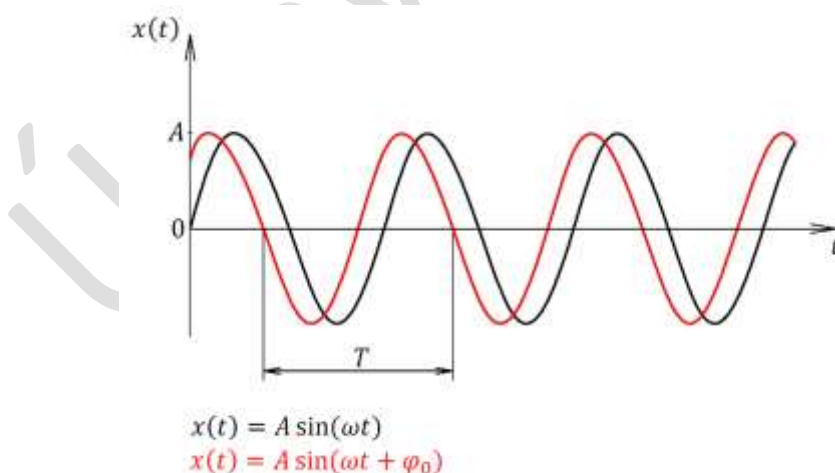
Mechanické kmitání je kmitavý pohyb, při němž se těleso, hmotný bod, nebo element kontinua střídavě vychyluje v různých směrech od své tzv. **rovnovážné polohy**, v níž jsou všechny síly na těleso působící ve statické rovnováze. V této poloze by se daný objekt nacházel, kdyby nekmital a byl v klidu. Objekt vykonávající mechanické kmity nazýváme mechanický oscilátor.

Je-li časový průběh kmitů pravidelný, takže jejich průběh se přesně opakuje vždy po stejné době T zvané **perioda (doba kmitu)**, pak jde o **kmitání periodické**. Nejjednodušším kmitavým pohybem hmotného bodu (tělesa) je periodický pohyb hmotného bodu (tělesa) po přímce. Tento pohyb nazýváme **jednoduchý harmonický pohyb**, dá-li se popsat rovnicí (7.1). Objektu, který takový to pohyb vykonává, říkáme **lineární harmonický oscilátor**.

Označíme-li výchylku lineárního harmonického oscilátoru z rovnovážné polohy x můžeme pro její závislost na čase psát

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (7.1)$$

kde kladná konstanta A se nazývá amplituda výchylky (obr. 7.1). Člen $(\omega t + \varphi_0)$ je bezrozměrná veličina, která se nazývá fáze a určuje hodnotu výchylky v daném čase. Po dosazení za $t = 0$ dostáváme $x(0) = A \sin(\varphi_0)$. Hodnota φ_0 tedy určuje výchylku v čase $t = 0$, a proto se nazývá počáteční fáze. Kladná konstanta ω se nazývá úhlová frekvence.



Obr. 7.1

Doba, po které se periodický pohyb opakuje, nazýváme **perioda (doba kmitu)**.

7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

Tuto podmínku můžeme zapsat:

$$x(t) = x(t + T) \quad (7.2)$$

$$A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \sin[\omega(t + T) + \varphi_0] \quad (7.3)$$

Vyřešením této goniometrické rovnice dostaneme vztah $\omega T = 2\pi$ a tedy

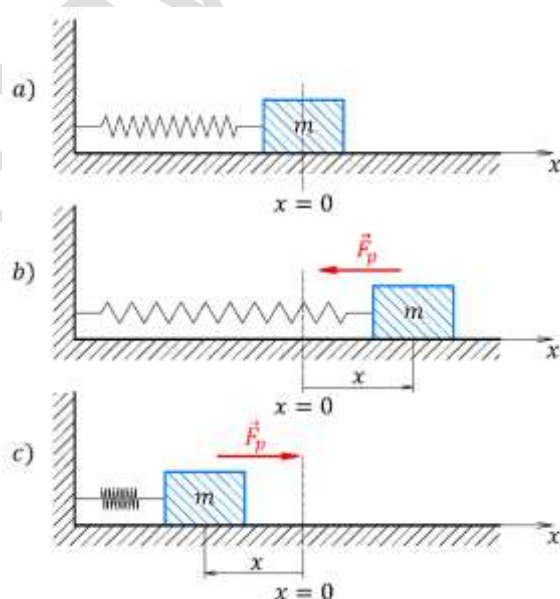
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (7.4)$$

Doba kyvu (perioda) je doba z jedné krajní polohy do druhé a návrat do výchozí. Převrácená hodnota periody se nazývá **frekvence (kmitočet)**, značíme ji f a udává, kolikrát se periodický děj opakuje za jednotku času. Jednotkou frekvence je $[f] = \text{s}^{-1} = \text{Hz}$ (hertz). Platí tedy

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (7.5)$$

7.1 Lineární harmonický oscilátor netlumený

Jako příklad netlumeného harmonického oscilátoru vezmeme těleso o hmotnosti m upevněné na spirálovou pružinu o tuhosti k , které se může pohybovat po vodorovné podložce bez tření. **Tuhost pružiny k** je kladná konstanta charakterizující pružinu. Čím větší tuhost tím větší sílu musíme vynaložit na stlačení (natažení) pružiny. Pro zjednodušení řešení této úlohy si osu x soustavy souřadnic položíme do podélné osy pružiny. Počátek soustavy souřadnic umístíme do rovnovážné polohy tělesa (obr. 7.2). Po vychýlení tělesa z rovnovážné polohy bude pružina na těleso působit silou, jejíž velikost je přímo úměrná výchylce a směřuje do rovnovážné polohy, tedy proti výchylce (proto znaménko -).



Obr. 7.2

7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

Platí tedy

$$F = F_p = -k x . \quad (7.6)$$

Jiné síly na těleso nepůsobí (tření a odpor vzduchu zanedbáváme). Známe tedy výslednici sil působících na těleso. Podle 2. Newtonova zákona platí

$$F = F_x = ma_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx . \quad (7.7)$$

Upravením této rovnice dostaneme

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 . \quad (7.8)$$

Jedná se o obyčejnou lineární diferenciální rovnici druhého řádu (řád nejvyšší derivace) s konstantními koeficienty bez pravé strany (homogenní rovnice). Řešit (integrát) diferenciální rovnici znamená nalézt všechny funkce (integrály) $x = x(t)$, které vyhovují dané diferenciální rovnici.

Řešením této rovnice je funkce ve tvaru $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, kde A, ω, φ_0 jsou konstanty, které postupně určíme tak, že tuto funkci dosadíme do řešené diferenciální rovnice.

Nejprve je třeba funkci $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ dvakrát zderivovat

$$\frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0), \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) .$$

Po dosazení do rovnice (7.8) dostaneme

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{m} A \sin(\omega t + \varphi_0) = 0 . \quad (7.9)$$

A po úpravě:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} . \quad (7.10)$$

Integrační konstant A, φ_0 určíme z počátečních podmínek. Konstanta A je určena hodnotou počátečního vychýlení a druhá konstanta φ_0 určuje fázi kmitů v čase $t = 0$. Výsledné řešení je tedy:

$$x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_0\right) .$$

(7.11)

Výsledný průběh výchylky tělesa na pružině odpovídá jednoduchému harmonickému pohybu.

7.1.1 Rychlost a zrychlení harmonického pohybu

Rychlost tělesa konajícího harmonický pohyb dostaneme derivací vztahu pro souřadnici, tedy derivací funkce $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) . \quad (7.12)$$

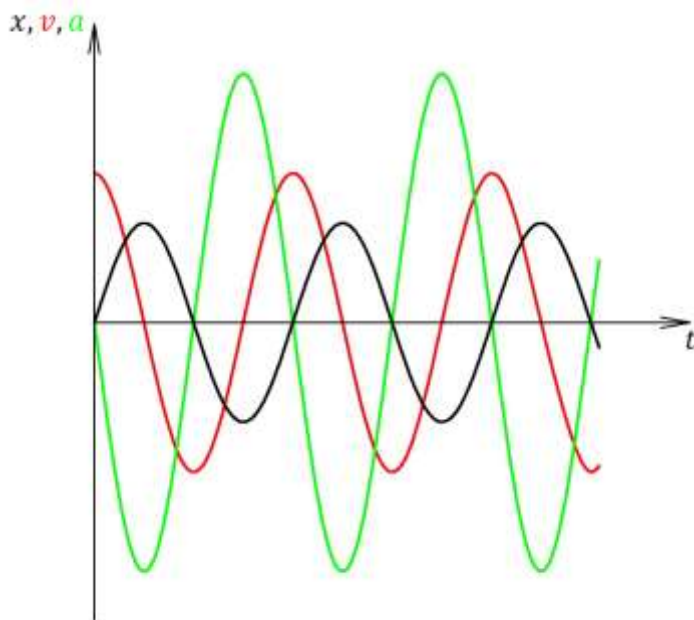
Pokud je v čase $t_0 = 0$ i $\varphi_0 = 0$, maximální rychlost těleso nabývá při průchodu rovnovážnou polohou ($\cos 0 = 1$) a její hodnota je $v_{\max.} = A\omega$.

Zrychlení tělesa konajícího harmonický pohyb dostaneme derivací vztahu pro rychlost, tedy derivací funkce $v_x = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t) . \quad (7.13)$$

Pokud je v čase $t_0 = 0$ i $\varphi_0 = 0$, maximální zrychlení těleso nabývá pro $x = x_{\max.}$, tedy při dosažení amplitudy ($\sin \omega t = 1$) a její hodnota je $a_{\max.} = A\omega^2$.

Časová závislost výchylky, rychlosti a zrychlení tělesa při harmonickém pohybu je znázorněna na obr. 7.3.



Obr. 7.3

7.1.2 Energie harmonického oscilátoru

Silové působení pružiny je příkladem pohybu v poli konzervativních sil (kapitola 3), kde platí zákon zachování mechanické energie. Velikost síly způsobující harmonický pohyb hmotného bodu ve směru osy x lze vyjádřit relací $F_p = -kx$, kde k je tuhost pružiny a x je okamžitá výchylka hmotného bodu ve směru osy x . Práce, kterou musíme vykonat, aby se pružina protáhla z polohy $x = 0$ do bodu vzdáleného o A , který je zároveň krajní polohou kmitajícího bodu určíme jako:

$$W = \int_0^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^A kx dx = \frac{1}{2} kA^2. \quad (7.14)$$

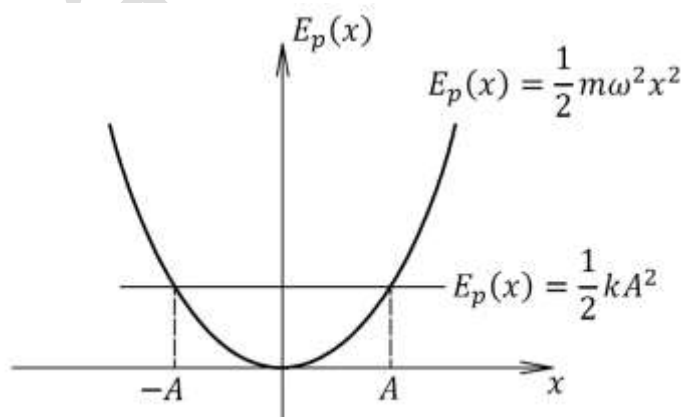
Vykonaná práce se projeví ve zvýšení potenciální energie kmitajícího bodu.

Na obr. 7.4 je znázorněn průběh potenciální energie hmotného bodu konajícího kmitavý harmonický pohyb v závislosti na okamžité výchylce x . Celková energie hmotného bodu

$$E = E_k + E_p \quad (7.15)$$

je v amplitudě A rovna potenciální energii hmotného bodu $\frac{1}{2}kA^2$, protože jeho kinetická energie je v krajní poloze nulová. V kterémkoliv jiném bodě je celková energie kmitajícího hmotného bodu dána součtem kinetické energie E_k a potenciální energie E_p .

$$E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2. \quad (7.16)$$



Obr. 7.4

7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

O tom, že celková energie hmotného bodu během kmitavého pohybu zůstává konstantní, je možno se přesvědčit dosazením za velikost okamžité rychlosti v a okamžitou výchylku x do vztahu (7.16).

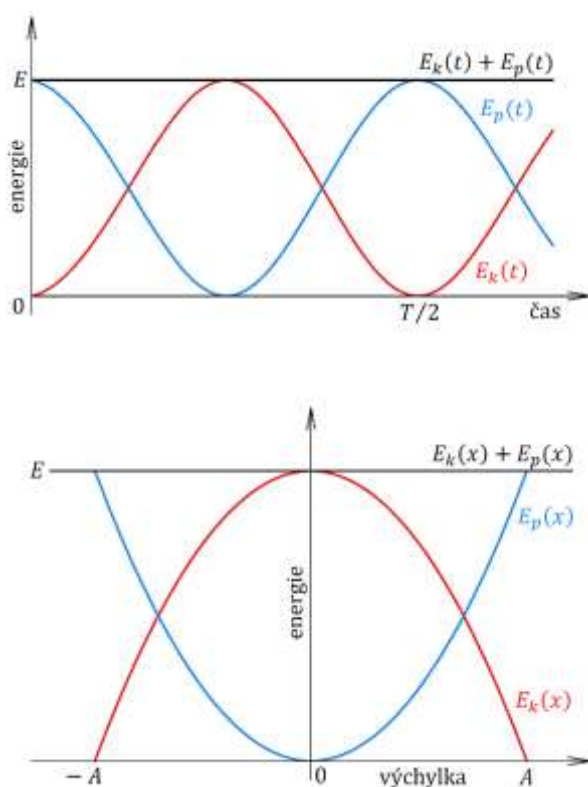
$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (7.17)$$

$$E_k + E_p = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0),$$

kde jsme za k dosadili vztah (7.10) $k = m\omega^2$, což vyplývá z pohybové rovnice pro harmonický pohyb hmotného bodu. Další úpravou vztahu pro $E_k + E_p$ dostaneme

$$E_k + E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 [\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0)] = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2. \quad (7.18)$$



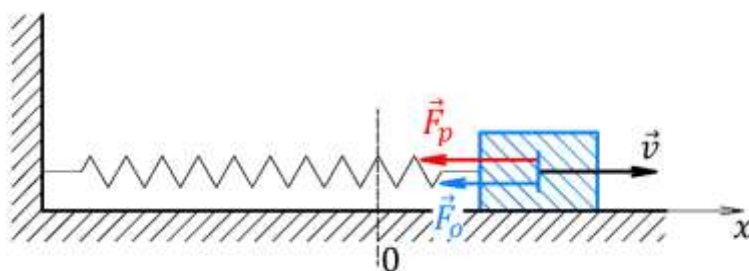
Obr. 7.5 (podle [4])

Celková energie hmotného bodu upevněného na pružině je během kmitavého pohybu konstantní, **zachovává se**, a je stejně velká jako maximální kinetická energie nebo maximální potenciální energie.

7.2 Tlumený lineární harmonický oscilátor

Volné (vlastní) kmity oscilátoru (při nich působí na oscilátor pouze elastické síly, dané např. rovnicí $F_p = -k x$), není možné přesně realizovat, neboť při každém pohybu tělesa působí odpor tření a odpor prostředí (např. vzduchu), v němž se pohyb děje apod. Vlivem odporů postupně ubývá energie kmitů a amplituda výchylky s časem klesá. Takové kmity nazýváme tlumené.

Často se předpokládá, že odpor prostředí, tj. odporová síla $\vec{F}_o$ je přímo úměrná okamžité rychlosti $\vec{v}$ hmotného bodu (tělesa, oscilátoru) a působí vždy proti směru okamžité rychlosti tělesa. Tedy $\vec{F}_o = -B\vec{v}$, kde $B > 0$ se nazývá **součinitel lineárního (viskózního) odporu**. Pro pohyb pouze v jednom směru, např. ve směru osy x , dostaneme $F_{Ox} = -Bv_x = -B \frac{dx}{dt}$. Řešme tentýž příklad jako pro harmonický oscilátor netlumený, ale budeme navíc uvažovat i odpor prostředí (obr. 7.6).



Obr. 7.6

Výslednice sil působících na těleso bude:

$$F_x = -kx - Bv_x = -kx - B \frac{dx}{dt} . \quad (7.19)$$

Opět podle II. Newtonova zákona platí:

$$F_x = ma_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - B \frac{dx}{dt} . \quad (7.20)$$

Upravíme tuto rovnici s použitím označení: $\frac{k}{m} = \omega^2$, $\frac{B}{m} = 2b$. Potom po úpravě dostáváme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{B}{m} \frac{dx}{dt} \quad (7.21)$$

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + 2b \frac{d x}{d t} + \omega^2 x = 0 . \quad (7.22)$$

Jedná se opět o obyčejnou lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty s pravou stranou rovnou 0. Ukažme si, jak lze takovou rovnici řešit.

Další postup řešení je následující:

- Řešení předpokládáme ve tvaru funkce $x(t) = Ce^{\lambda t}$.

Abychom opět získali hodnoty konstant C a λ , funkci $x(t) = Ce^{\lambda t}$ dvakrát zderivujeme

$$\frac{d x}{d t} = C \lambda e^{\lambda t} = \lambda x , \quad \frac{d^2 x}{d t^2} = \lambda^2 x$$

- Dosadíme zpět do diferenciální rovnice a po úpravě dostaneme:

$$\lambda^2 + 2b\lambda + \omega^2 = 0 .$$

Tato rovnice se nazývá charakteristická rovnice. Vyřešením této kvadratické rovnice získáme dva kořeny:

$$\lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega^2} , \quad \lambda_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega^2} .$$

- Obecné řešení diferenciální rovnice pokud $\lambda_1 \neq \lambda_2$ má tvar

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} ,$$

kde C_1, C_2 jsou integrační konstanty.

O tom, jaký pohyb je výsledkem tlumení harmonického oscilátoru, rozhoduje diskriminant $\sqrt{b^2 - \omega^2}$ vystupující v kořenech charakteristické rovnice λ_1, λ_2 .

Řešení rozdělíme na 3 varianty.

$$1) \quad b^2 < \omega^2$$

Konstanta b je přímo úměrná tlumení, tj. při malém tlumení vznikne periodický pohyb. Kořeny charakteristické rovnice λ_1, λ_2 jsou komplexně sdružená čísla ($\pm \sqrt{b^2 - \omega^2} = \pm i \sqrt{\omega^2 - b^2}$) a řešení diferenciální rovnice vypadá následovně:

$$x(t) = e^{-bt} (C_1 e^{i \sqrt{\omega^2 - b^2} t} + C_2 e^{-i \sqrt{\omega^2 - b^2} t}) . \quad (7.23)$$

Tento výsledek upravíme užitím Eulerova vzorce $e^{\pm i \varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$ a dostaneme

$$x(t) = e^{-bt} [(C_1 + C_2) \cos \sqrt{\omega^2 - b^2} t + i(C_1 - C_2) \sin \sqrt{\omega^2 - b^2} t] \quad (7.24)$$

Zavedeme-li substituci:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= C \sin \varphi_0, & i(C_1 - C_2) &= C \cos \varphi_0 \\ \text{dostaneme} \quad x(t) &= e^{-bt} \left[C \sin \varphi_0 \cos(\sqrt{\omega^2 - b^2} t) + C \cos \varphi_0 \sin(\sqrt{\omega^2 - b^2} t) \right]. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Tento výraz upravíme a zjednodušíme pomocí goniometrického vztahu:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

a dostaneme výsledné řešení:

$$x(t) = C e^{-bt} \sin(\sqrt{\omega^2 - b^2} t + \varphi_0). \quad (7.26)$$

Srovnáním s rovnicí volných harmonických kmitů $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ vidíme, že:

- při $b < \omega$ vzniká kmitavý pohyb se **stálou frekvencí**

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2} < \omega, \quad (7.27)$$

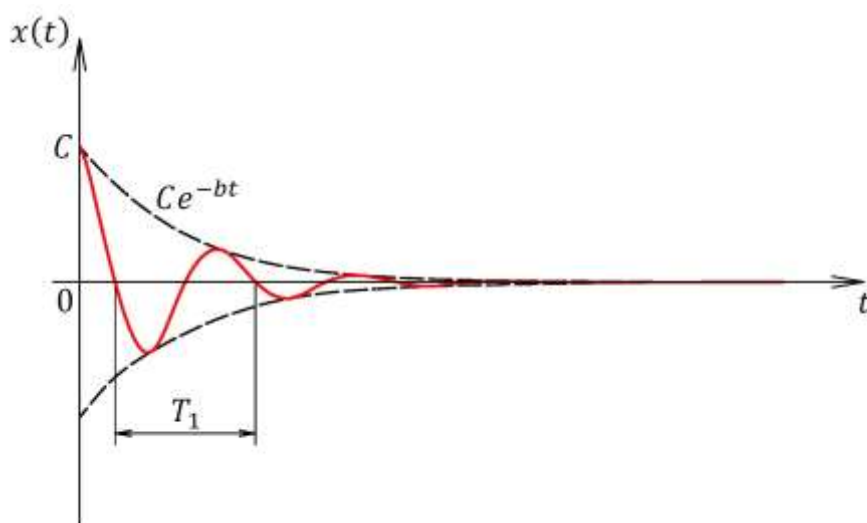
která je menší než vlastní úhlová frekvence ω , jakou by oscilátor kmital, kdyby nebyl tlumen.

- amplituda výchylky však není konstantní, ale exponenciálně se zmenšuje s časem podle vztahu Ce^{-bt} . O „rychlosti“ klesání amplitudy kmitů rozhoduje parametr b , který se nazývá **součinitel tlumení**. Těleso koná tlumené kmity. Periodu tlumených kmitů určíme

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - b^2}}. \quad (7.28)$$

- **doba kmitů T_1 tlumených je konstantní a je delší než doba kmitu $T = \frac{2\pi}{\omega}$ v případě kmitů netlumených.**

Z matematického hlediska tlumené kmitání není periodické, tj. nevyhovuje podmínce $x(t + T_1) = x(t)$, má však některé vlastnosti jevící periodicitu, a proto ho nazýváme **pseudoperiodické** (obr. 7.7).



Obr. 7.7

Mírou tlumení je bezrozměrná **veličina útlum** Λ a je definovaná jako poměr dvou po sobě následujících výchylek ve stejném směru (třeba maximálních) od rovnovážné polohy v okamžicích t a $t+T_1$.

Jelikož platí podle rovnice 7.28, že $T_1\sqrt{\omega^2 - b^2} = 2\pi$, lze odvodit vztah:

$$\Lambda = \frac{x(t)}{x(t+T_1)} = \frac{Ce^{-bt} \cos\left[\sqrt{\omega^2 - b^2}t\right]}{Ce^{-b(t+T_1)} \cos\left[\sqrt{\omega^2 - b^2}(t+T_1)\right]} = e^{+bT_1}. \quad (7.29)$$

Přirozený logaritmus útlumu se nazývá **logaritmický dekrement** δ (dekrement = úbytek). Platí:

$$\delta = \ln \Lambda = bT_1. \quad (7.30)$$

$$2) \quad b^2 > \omega^2$$

Tlumení je velké, řešení diferenciální rovnice je neperiodická funkce. Kořeny charakteristické rovnice λ_1, λ_2 jsou reálné. Řešení má tvar

$$x(t) = C_1 e^{\left(-b + \sqrt{b^2 - \omega^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-b - \sqrt{b^2 - \omega^2}\right)t}. \quad (7.31)$$

Výchylka oscilátoru na čase je dána součtem dvou exponenciálních křivek, které se s rostoucím časem asymptoticky blíží k nule. Oscilátor (těleso) se vrací zpět do rovnovážné polohy, aniž ji překročí (obr. 7.8). Tento pohyb nazýváme **aperiodický pohyb** lineárního harmonického oscilátoru.

7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

Konstanty C_1, C_2 lze určit z počátečních podmínek, které jsou: v čase $t=0$ jsme těleso vychýlili do polohy $x(0) = C$ a jeho rychlost byla těsně po uvolnění $v(0) = \frac{dx}{dt} = 0$.

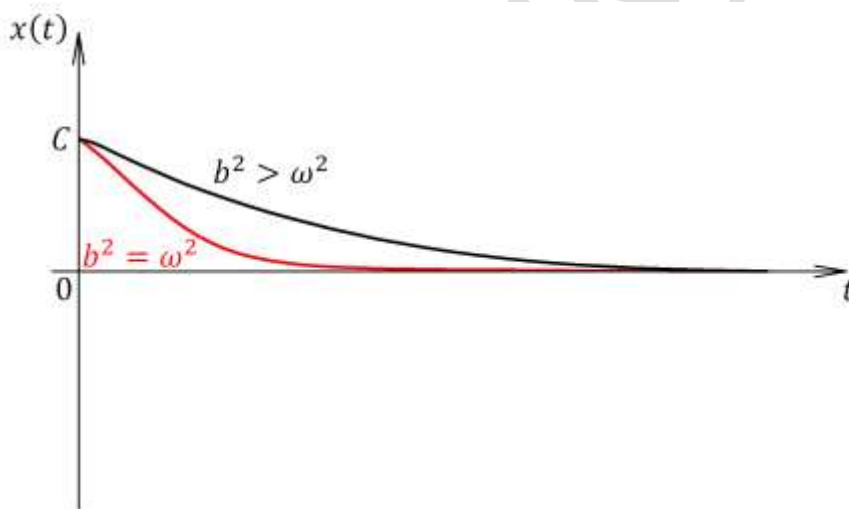
3) $b^2 = \omega^2$

Kořeny charakteristické rovnice λ_1, λ_2 jsou reálné a shodné. Obecné řešení diferenciální rovnice v takovém případě má tvar:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-bt} = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega t}.$$

 (7.32)

Tento pohyb nazýváme **mezní aperiodický pohyb** lineárního harmonického oscilátoru. Oscilátor (těleso) se opět vrací zpět do rovnovážné polohy, aniž ji překročí a děje se tak rychleji než při $b > \omega$ (tj. „nejrychlejším“ možným způsobem). Toho se využívá v technických zařízeních, např. při volbě tlumení u systémů měřicích přístrojů, kdy chceme dosáhnout rovnovážné polohy systému co nejrychleji, bez kývání ručičky (obr. 7.8).



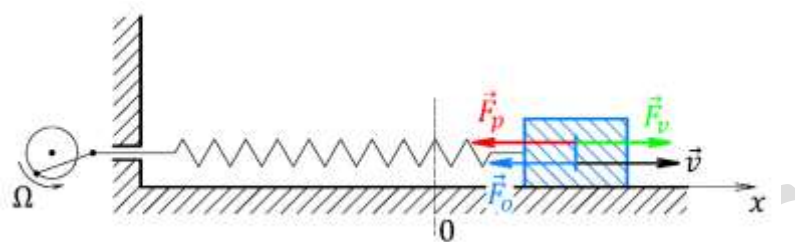
Obr. 7.8

7.3 Vynucené kmitý lineárního harmonického oscilátoru

Velice důležitým případem v praxi jsou **kmitý vynucené**, které koná oscilátor vlivem působení vnější periodické síly. Při kmitání oscilátoru v odporujícím prostředí postupně klesá celková energie oscilátoru o energii, potřebnou k překonání odporu, v důsledku čehož kmitý za určitou dobu vymizí. U naší pružiny s tělesem z předchozích dvou příkladů můžeme toto periodické působení vnější síly realizovat uchycením pružiny na obvodu otáčejícího se kola.

7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

Kolo se bude otáčet konstantní úhlovou rychlostí Ω a dá se ukázat, že tím i vnější síla na pružinu se bude měnit se stejnou frekvencí a můžeme ji zapsat vztahem $F_V = F_0 \sin \Omega t$.



Obr. 7.9

Kmitavý pohyb může oscilátor působením vnější časově proměnné síly konat libovolně dlouho. Toto kmitání nazýváme **nucené (vynucené)** a vnější sílu F_V silou **budicí**.

Shrňme si tedy všechny síly, které působí na těleso o hmotnosti m uchycené k pružině o tuhosti k , vše v prostředí se součinitelem lineárního odporu B , jak bylo značeno v předchozí kapitole (obr. 7.6). K těmto silám přibude vnější budící síla o velikosti F_V a dostaneme výslednici všech sil:

$$F_x = -kx - B \frac{dx}{dt} + F_0 \sin(\Omega t) . \quad (7.33)$$

Z II. Newtonova zákona opět sestavíme pohybovou rovnici:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - B \frac{dx}{dt} + F_0 \sin(\Omega t) . \quad (7.34)$$

Zavedeme-li označení jako v předešlém odstavci $\frac{k}{m} = \omega^2$, $\frac{B}{m} = 2b$, kde b je součinitel tlumení a ω je vlastní úhlová frekvence volných kmitů, jaké by oscilátor konal, kdyby na něj kromě pružné vazby $-kx$ nepůsobily jiné síly, pak z (7.34) dostaneme rovnici:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t) . \quad (7.35)$$

Tato rovnice je obyčejná lineární nehomogenní (neboť má nenulovou pravou stranu) diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty.

Další postup řešení je následující:

- Z teorie řešení obyčejných diferenciálních rovnic vyplývá, že obecné řešení rovnice nehomogenní je rovno součtu obecného řešení příslušné rovnice homogenní (tj. téže rovnice bez pravé strany) $x_h(t)$ a libovolného partikulárního řešení $x_p(t)$.
- Řešením rovnice homogenní jsme se zabývali v odstavci 7.1. Např. pro $b < \omega$ je obecné řešení homogenní rovnice dáno rovnicí (7.26) $x(t) = C e^{-bt} \sin(\sqrt{\omega^2 - b^2} t + \varphi_0)$.
- Partikulární řešení se určuje u lineárních rovnic zkusmo, zvolíme funkci stejného typu jako je funkce na pravé straně rovnice a to tedy $x(t) = A_v \sin(\Omega t + \gamma)$. Dosazením do diferenciální rovnice určíme konstanty A_v, γ .

Úplné řešení vynuceného kmitání lze popsat rovnicí:

$$x(t) = C e^{-bt} \sin(\sqrt{\omega^2 - b^2} t + \varphi_0) + A_v \sin(\Omega t + \gamma). \quad (7.36)$$

Z tohoto řešení vyplývá:

- První člen klesá s časem k nule a tedy po určité době je roven nule (obr. 7.7) a druhý člen vyjadřuje vynucené kmity o stejné frekvenci jako má budící síla.
- Zbývá určit konstanty A_v, γ , kde A_v je amplituda vynucených kmitů a γ je fázový posun mezi výchylkou a budící silou. To provedeme dosazením do rovnice (7.35).
- Funkci $x(t) = A_v \sin(\Omega t + \gamma)$ dvakrát zderivujeme a dosadíme

$$-A_v \Omega^2 \sin(\Omega t + \gamma) + 2b A_v \Omega \cos(\Omega t + \gamma) + \omega^2 A_v \sin(\Omega t + \gamma) = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t). \quad (7.37)$$

- Tato rovnice musí být splněna v každém okamžiku, tj. pro všechna t , volíme dva časy: $\Omega t + \gamma = 0, \Omega t + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Dosazením do rovnice (7.36) dostaneme soustavu dvou rovnic pro dvě

$$\begin{aligned} \text{neznámé } A_v, \gamma \quad 2b A_v \Omega &= -\frac{F_0}{m} \sin \gamma \\ -A_v \Omega^2 + \omega^2 A_v &= \frac{F_0}{m} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \frac{F_0}{m} \cos \gamma. \end{aligned}$$

Vydělíme-li první rovnici druhou dostaneme řešení pro γ , resp. $\operatorname{tg} \gamma$

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{2b\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \quad (7.38)$$

a umocněním obou rovnic na druhou a sečtením dostaneme řešení pro A_v

$$A_v = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}} . \quad (7.39)$$

7.3.1 Rezonance amplitudy

Po určité době, kdy první člen řešení (7.36) je roven 0, nastane ustálený stav. V tomto stavu koná oscilátor netlumené vynucené kmity, popsané druhým členem rovnice (7.36), tj. $x(t) = A_v \sin(\Omega t + \gamma)$.

Pojem **rezonance** známe z běžného života. Někdy je žádoucím jevem a využívá se tak například u hudebních nástrojů k zesílení zvuku, ladění, u kmitočtoměrů, k rozhoupání houpačky (působíme na houpačku harmonickou pravidelnou silou o stejné frekvenci jako je vlastní frekvence kmitů houpačky), ale například i v mikrovlnné troubě, u antény, v lékařství (magnetická rezonance). Při rezonanci dochází k maximálnímu přenosu mechanické energie na oscilátor. Proto lze při rezonanci vyvolat i poměrně malou vnější silou velké amplitudy – např. malou silou rozhoupeme i velmi těžký zvon, budeme-li natahovat lano od zvonu v pravidelných časových intervalech, odpovídajících frekvenci jeho vlastního kmitání. Rezonance má i **nežádoucí až destruktivní účinky** (rezonance strojních součástí – kritické otáčky hřídele, rezonance staveb).

Aby hodnota amplitudy A_v byla maximální, musí být

$$\frac{dA_v}{d\Omega} = 0 . \quad (7.40)$$

Z důvodů konstanty v čitateli zlomku a monotonie funkce ve jmenovateli stačí, když bude rovna nule derivace výrazu pod odmocninou. Tato derivace je rovna:

$$2(\omega^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 8b^2\Omega = 0 \quad (7.41)$$

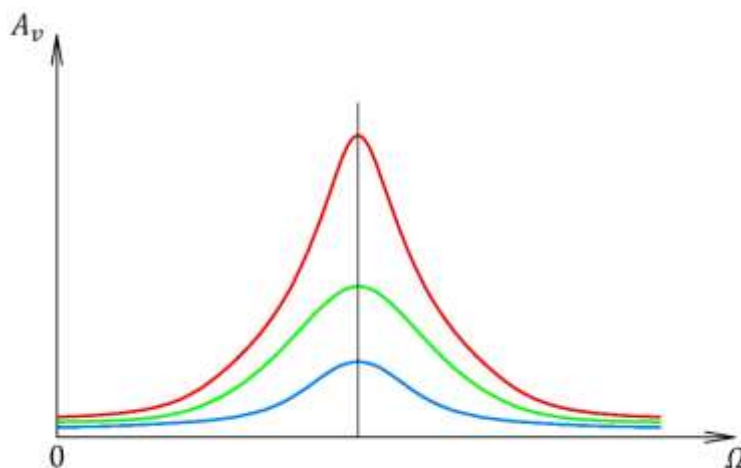
Upravení této rovnice dostaneme, že výraz pod odmocninou bude minimální, když

$$\Omega = \Omega_r = \sqrt{\omega^2 - 2b^2} . \quad (7.42)$$

Dosazením této hodnoty do vztahu pro amplitudu dostaneme hodnotu rezonanční amplitudy:

$$A_v = \frac{\frac{F_0}{m}}{2b\sqrt{(\omega^2 - b^2)}} . \quad (7.43)$$

Závislost amplitudy vynucených kmitů A_v na frekvenci budící síly Ω se nazývá **rezonanční křivka** (obr. 7.10). Rezananční křivky jsou tím strmější (rezonance je ostřejší), čím menší je tlumení b oscilátoru. Pro $b = 0$, tj. u systémů netlumených, nastává rezonance pro $\Omega_r = \omega$ a tedy $A_v \rightarrow \infty$ (rezonanční katastrofa).



Obr. 7.10

7.4 Složené kmity. Princip superpozice kmitů

Koná-li hmotný bod nebo těleso dva či více mechanických kmitavých pohybů současně vzniknou tzv. složené kmity. Budeme uvažovat, že soustava, která vykonává kmity, je **lineární**, tj. taková, jejíž kmitání lze popsat lineárními diferenciálními rovnicemi.

Jednotlivé kmity, které koná lineární soustava současně, se dějí **nezávisle** na sobě a každý z nich probíhá stejně, jako kdyby se v soustavě uskutečňoval sám. **Kmity se tedy vzájemně neovlivňují.**

Výchylka složeného kmitavého pohybu $\vec{r}$ je rovna vektorovému součtu výchylek $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$, ... jednotlivých samostatných kmitavých pohybů:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \dots \quad (7.44)$$

U lineárních soustav platí **princip superpozice kmitů**.

7.4.1 Skládání stejnosměrných kmitů

Koná-li hmotný bod současně několik kmitavých pohybů podél téže přímky, jde o stejnosměrné kmity. Bude-li touto přímkou osa x (což můžeme libovolně zvolit), platí:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) , \\ x_2(t) &= A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) . \end{aligned} \quad (7.45)$$

Rovnice (7.44) se zjednoduší na rovnici jen pro x -ovou souřadnici

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) . \quad (7.46)$$

Výsledek je ovlivněn jednotlivými parametry (amplitudou, úhlovou frekvencí, počáteční fází) a jejich vzájemným vztahem. Těchto 6 parametrů by vedlo na mnoho různých variant výsledných kmitů. Uveďme si základní případy.

- **Skládání stejnosměrných harmonických kmitů stejné frekvence**

Předpokládejme, že amplituda obou kmitů je stejná a $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi$, potom podle (7.1) můžeme psát

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \sin(\omega t + \varphi) \\ x_2(t) &= A \sin(\omega t) \end{aligned} . \quad (7.47)$$

Výchylka výsledných kmitů je tedy podle (7.46)

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + A \sin(\omega t) . \quad (7.48)$$

Použitím goniometrického vztahu $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ dostaneme pro (7.47):

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A [\sin(\omega t + \varphi) + \sin(\omega t)] = 2A \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) .$$

 (7.49)

Z toho vztahu lze vyčíst, jak výsledné složené kmity budou vypadat.

Člen $2A \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ je konstantní a rozhoduje o velikosti amplitudy výsledných kmitů. Amplituda bude - minimální (nulová) pro

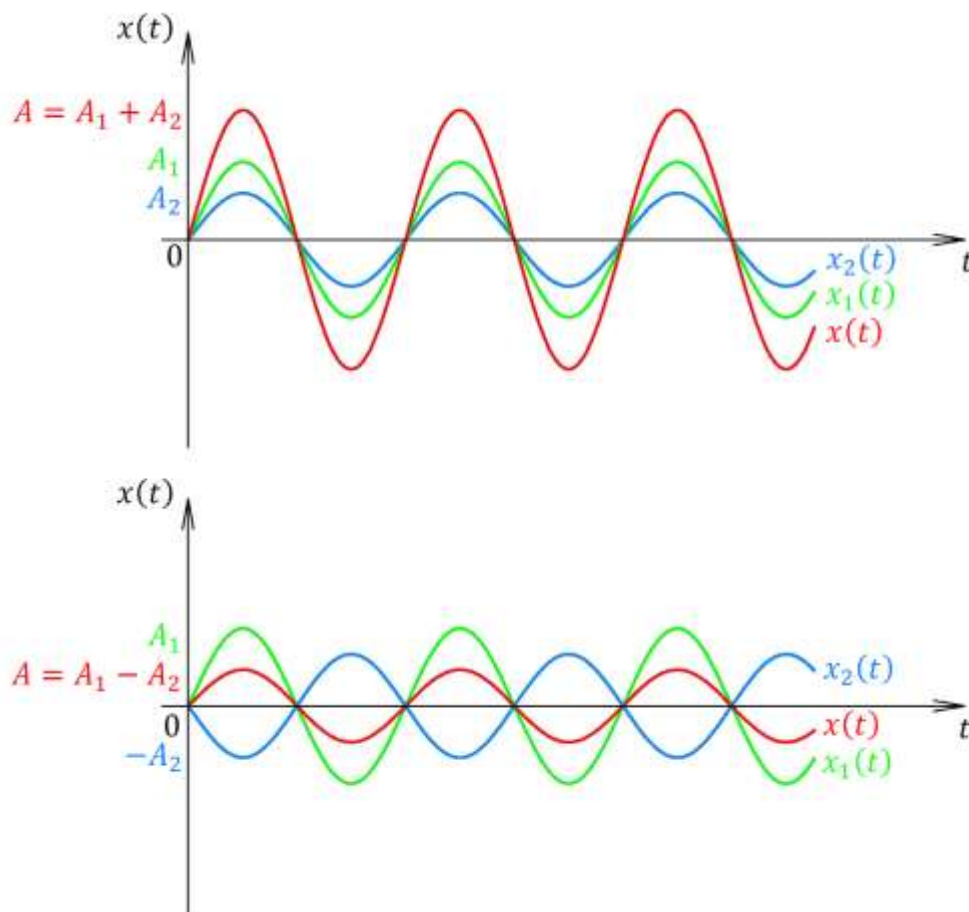
$$\cos \frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \varphi = (2k+1) \pi$$

- maximální pro

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \pm 1 \Rightarrow \varphi = 2k\pi ,$$

kde k je celé číslo.

Výsledné kmity budou harmonické a budou mít stejnou úhlovou frekvenci jako původní kmity, protože výslednou úhlovou frekvenci udává člen $\sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$ a počáteční fáze bude rovna $\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. O amplitudě výsledných kmitů tedy rozhoduje hodnota fázového posunu φ . Obdobná situace bude platit i v případě různých amplitud skládaných kmitů (obr. 7.11).



Obr. 7.11

- **Skládání stejnosměrných harmonických kmitů s různou frekvencí.**

Mějme dva stejnosměrné harmonické kmity, popsané rovnicemi:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) , \\ x_2(t) &= A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) . \end{aligned} \quad (7.50)$$

Pro výsledné kmitání platí:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) . \quad (7.51)$$

Zjistíme, za jakých podmínek bude výsledné kmitání **periodické** (pozor na rozdíl slov periodické a harmonické), jsou-li obě skládaná kmitání harmonická. Potom obě skládaná kmitání musí být periodická se stejnou společnou periodou T .

Podmínky periodicity jsou dvě: $\sin[\omega_1(t+T) + \varphi_1] = \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$

$$\sin[\omega_2(t+T) + \varphi_2] = \sin(\omega_2 t + \varphi_2) . \quad (7.52)$$

Vyřešením těchto goniometrických rovnic dostaneme podmínky:

$$\begin{aligned}\omega_1 T &= n_1 2\pi, \\ \omega_2 T &= n_2 2\pi,\end{aligned}\tag{7.53}$$

kde n_1, n_2 jsou celá čísla $n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots$

Další úpravou soustavy rovnic (vyloučením periody T) dostaneme podmínku pro periodicitu výsledných kmitů:

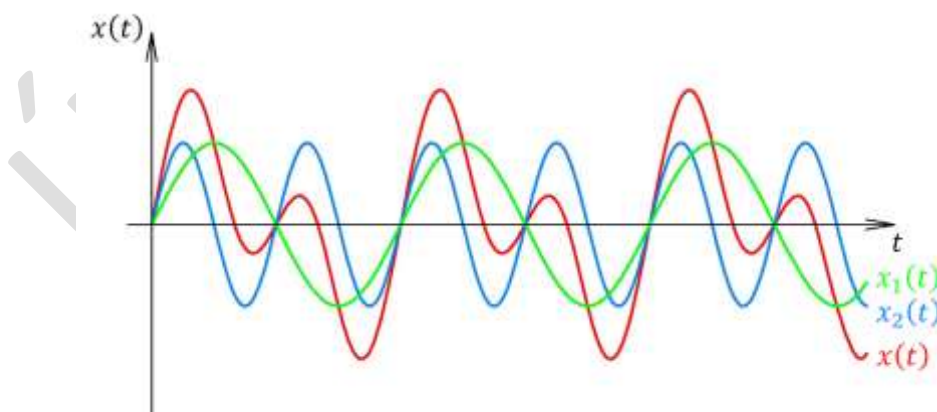
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}.\tag{7.54}$$

Dosazením ze vztahů pro úhlovou frekvenci a periodu původních kmitů $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$

dostaneme $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{n_1}{n_2}$.

Výsledné periodické kmitání je obecně neharmonické, ale opakuje se po uplynutí doby T v případě, že poměr period původních kmitů $\frac{T_2}{T_1}$ je v poměru celých čísel. V takovém případě mluvíme o **souměřitelných periodách** (frekvencích).

Skládáním stejnosměrných harmonických kmitů souměřitelných frekvencí mohou vzniknout nejružnější periodické kmity s libovolným časovým průběhem, který závisí na počtu skládaných kmitů, na jejich kmitočtech, amplitudách a počátečních fázích (např. obr. 7.12).



Obr. 7.12

- **Skládání dvou stejnosměrných harmonických kmitů blízkých frekvencí**

V tomto případě budeme skládat dva stejnosměrné harmonické kmity, jejichž úhlové frekvence ω_1 , ω_2 se málo navzájem liší.

7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

Předpokládejme, že např. $\omega_1 > \omega_2$ a pro zjednodušení jsou amplitudy obou kmitů stejné $A_1 = A_2 = A$ a počáteční fáze jsou nulové $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, potom

$$\begin{aligned}x_1(t) &= A \sin(\omega_1 t), \\x_2(t) &= A \sin(\omega_2 t).\end{aligned}\quad (7.55)$$

Pro výsledné kmitání platí:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \sin(\omega_1 t) + A \sin(\omega_2 t). \quad (7.56)$$

Upravením pomocí goniometrického vztahu $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ dostaneme:

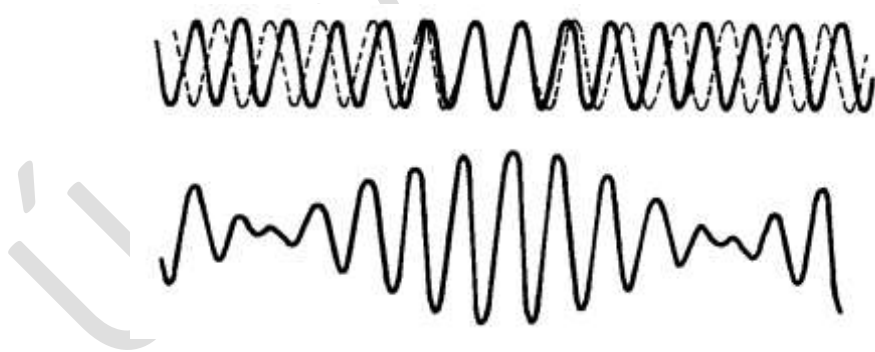
$$x(t) = 2A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right).$$

 (7.57)

Jelikož ω_1, ω_2 jsou blízké úhlové frekvence, pak platí $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Z toho plyne, že

s rostoucím časem t se funkce $\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$ bude měnit mnohem rychleji než funkce

$\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$ obr. 7.12.



Obr. 7.13

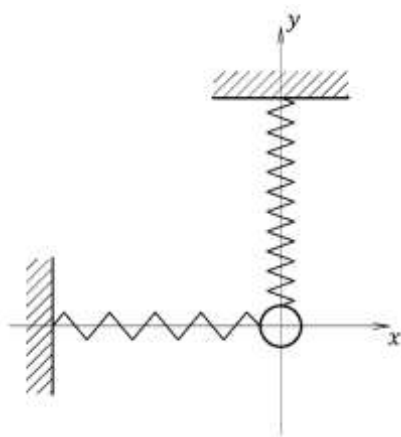
Výsledné kmity lze pokládat za sinusové s průměrnou frekvencí $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, jejichž amplituda

$2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$ není konstantní, ale periodicky se mění mezi nulou a hodnotou $2A$ s relativně

malou úhlovou frekvencí $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$. Tento kolísavý průběh amplitudy výsledného kmitu čili periodické zesilování a zeslabování kmitů se v akustice nazývá **rázy** nebo **zázněje**.

7.4.2 Skládání navzájem kolmých kmitů

V předchozí kapitole bylo popsáno skládání stejnosměrných kmitů a nyní řešíme, co platí pro skládání kmitů kolmých. **Zjistili jsme, že jsou-li všechny skládané kmity periodické a jejich periody souměřitelné, jsou i výsledné kmity periodické.** Výsledná trajektorie hmotného bodu je uzavřenou prostorovou křivkou, kterou hmotný bod periodicky probíhá. Nejsou-li periody kmitů souměřitelné, je výsledný kmit neperiodický a hmotný bod se pohybuje stále po jiné, neopakující se křivce.



Obr. 7.14

Popišme pohyb hmotného bodu, který koná dva navzájem kolmé harmonické kmity o stejné úhlové frekvenci ω ve směrech souřadnicových os x a y (obr. 7.14). Platí:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t) \\ y(t) &= B \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (7.58)$$

kde A, B jsou amplitudy kmitů (obr. 7.14), φ je fázový posun mezi oběma kmity.

Z těchto dvou rovnic určíme trajektorii pohybu hmotného bodu. Potřebujeme získat funkci $y(x)$, a tedy vyloučíme z rovnic čas t . Úpravami s použitím základních goniometrických vztahů dostáváme

$$\begin{aligned} \sin(\omega t) &= \frac{x}{A} \Rightarrow \cos(\omega t) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \\ y &= B \sin(\omega t) \cos \varphi + B \cos(\omega t) \sin \varphi = B \frac{x}{A} \cos \varphi + B \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \varphi \\ \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \varphi &= \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

Tato rovnice je rovnice kuželosečky, jejíž tvar závisí především na fázovém posuvu φ . Pokud například

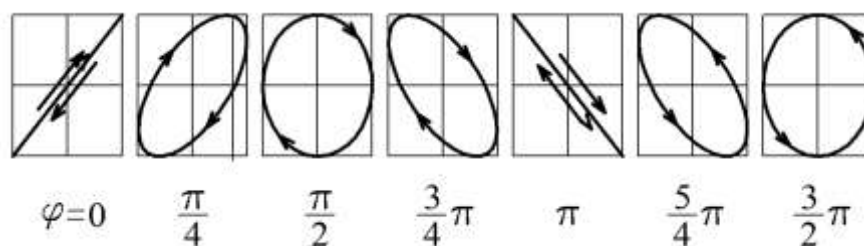
- $\varphi = 0$, potom

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{B}{A}x \quad \text{je rovnice \textbf{přímky}}$$

- $\varphi = \frac{\pi}{2}$, potom

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad \text{je rovnice \textbf{elipsy}}$$

Další možnosti jsou uvedeny na obr. 7.15.



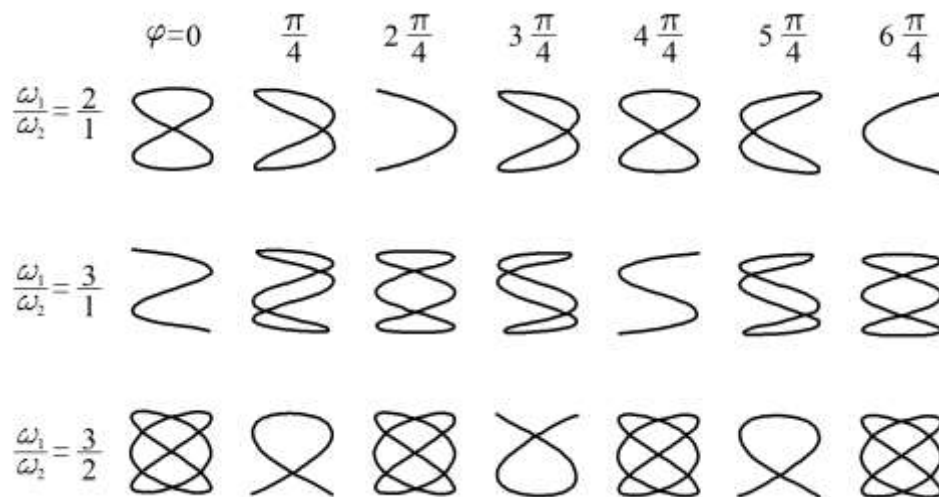
Obr. 7.15 [1]

V případě, že úhlové frekvence kolmých skládaných kmitů nebudou stejné $\omega_1 \neq \omega_2$, mějme kmitý popsané rovnicemi:

$$x(t) = A \sin(\omega_1 t),$$

$$y(t) = B \sin(\omega_2 t + \varphi).$$

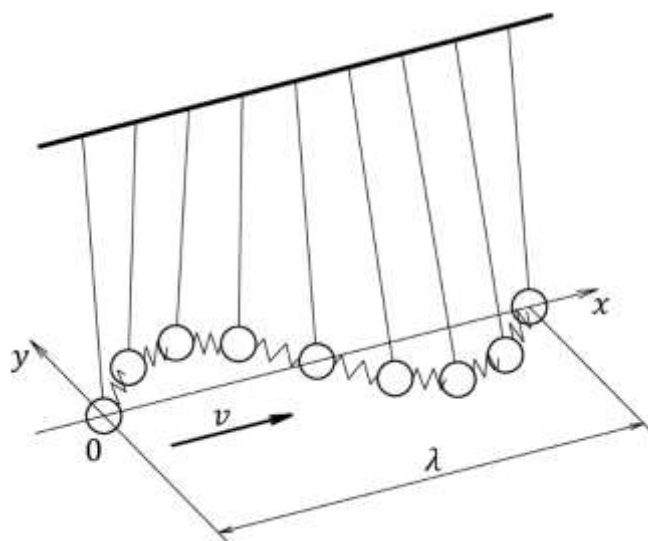
Složením těchto kmitů vzniknou periodické kmitý jen v případě, jsou-li jejich úhlové frekvence ω_1 a ω_2 (nebo periody T_1 a T_2) souměřitelné. Uzavřené rovinné křivky, představující trajektorii **hmotného bodu** konajícího periodické kmitý, nazýváme **Lissajousovy křivky**. Jejich tvar závisí na poměru amplitud $\frac{A}{B}$ obou skládaných kmitů, na poměru jejich frekvencí $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1}$ a na fázovém rozdílu φ jejich počátečních fází. Pro některé hodnoty těchto parametrů jsou křivky znázorněny na obr. 7.16.



Obr. 7.16 [1]

7.5 Vznik a šíření vlnění

V případě buzených kmitů jsme na hmotný bod působili periodickou silou. Touto silou může však působit jiný hmotný bod již vykonávající harmonické kmity. Dostáváme tak dva spřažené oscilátory (vázané oscilátory). Způsob, jakým na sebe oscilátory působí, nazýváme vazba. Na obrázku je tato vazba reprezentována pružinou, jejíž tuhost rozhoduje o typu vazby.



Obr. 7.17

7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

Nyní můžeme od dvou vázaných oscilátorů přejít k nekonečné řadě takovýchto oscilátorů (Machův vlnostroj) na obr. 7.17. Necht' x -ová osa souřadnic je souhlasná s řadou hmotných bodů. Vychýlíme-li první hmotný bod kolmo na osu x , začne tento bod vykonávat harmonické kmity. Tuto okamžitou výchylku si označíme u , a protože je to výchylka bodu v místě $x = 0$, pak v čase t zavedeme označení $u(x, t) = u(0, t)$. Prostřednictvím vazeb mezi jednotlivými hmotnými body začne po chvíli kmitat druhý hmotný bod, třetí, čtvrtý, atd. Jejich okamžitou výchylku označíme analogicky $u(x, t)$, kde za x můžeme dosadit x -ové souřadnice jednotlivých hmotných bodů. Kmitavý pohyb se v bodové řadě šíří konečnou rychlostí a tuto rychlost označíme v . Kmitání prvního hmotného bodu můžeme popsat tak, jak jsme byli zvyklí

$$u(0, t) = f(t) = u_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (7.59)$$

kde u_0 je amplituda, ω frekvence kmitů prvního hmotného bodu a φ_0 je počáteční fáze (pro začátek položíme $\varphi_0 = 0$). Stejná výchylka jako v poloze 0 bude v poloze x se zpožděním o čas $\tau = \frac{x}{v}$, kde v je právě rychlost šíření kmitání v bodové řadě. Což můžeme napsat opačně, že výchylka v bodě x je stejná jako v místě 0, v čase $\left(t - \frac{x}{v}\right)$, a tedy:

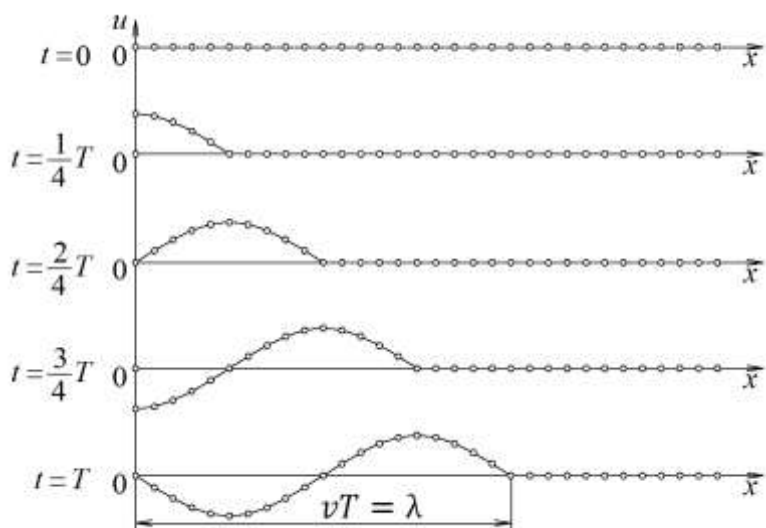
$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) = u_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]. \quad (7.60)$$

Vzdálenost dvou nejbližších bodů (oscilátorů) téže řady, v nichž se fáze kmitů liší o hodnotu 2π , se nazývá **vlnová délka** λ příslušné vlny. Můžeme také říci, že vlnová délka je vzdálenost, kterou vlna urazí během jedné periody (obr. 7.18), a tedy $\lambda = vT = \frac{v}{f} = \frac{v}{\frac{\omega}{2\pi}} = 2\pi \frac{v}{\omega}$.

Rychlost v nazýváme **fázová rychlost** šíření vlnění. Úpravou vztahu (7.60) dostaneme

$$u(x, t) = u_0 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x\right) = u_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{vT} x\right) = u_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) = u_0 \sin(\omega t - kx). \quad (7.61)$$

kde $\frac{2\pi}{\lambda} = k$ se nazývá vlnové číslo (úhlové vlnové číslo).



Obr. 7.18

Zatím jsme pracovali s vlněním šířícím se ve směru osy x , ale obecně se vlnění šíří v prostoru. Zajímá-li nás potom amplituda vlny v čase t a v místě o polohovém vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$ určíme ji z rovnice $u(\vec{r}, t) = u_0 \cdot \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$. Vektor $\vec{k}$ se nazývá **vlnový vektor**, jeho směr je ve směru šíření vlny a jeho velikost je vlnové číslo $\frac{2\pi}{\lambda}$.

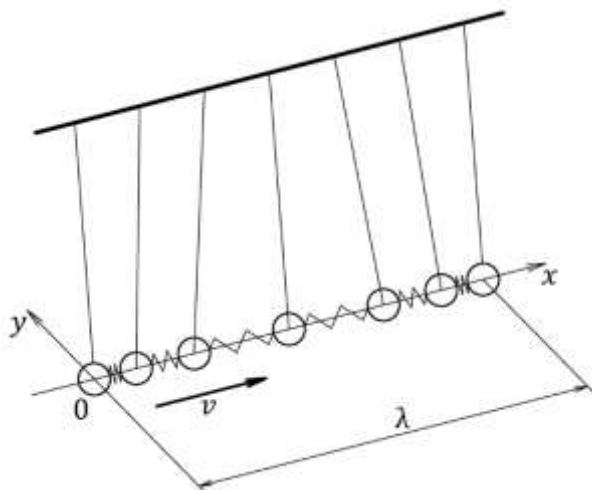
Nyní přejdeme od modelového příkladu řady kmitajících vázaných oscilátorů k reálnému vlnění. Mechanické kmitání částic prostředí, přenášené působením elastických sil (sil pružnosti) mezi sousedními objemovými elementy prostředí (vzduchu, pevné látky, kapaliny) postupně na další a další jeho elementy se nazývá **postupné elastické vlnění**. Jsou-li výchylky kmitů částic prostředí dostatečně malé, nedochází při šíření elastického vlnění k přenosu látky, tj. k jejímu přemísťování v určitém směru. Významným rysem postupného vlnění je to, že při jeho šíření dochází k přenosu energie ve směru šíření vlnění.

7.5.1 Příčné postupné vlnění

Jako příklad byl pro vysvětlení vzniku vlnění v předchozí kapitole vybrán model, kdy jednotlivé oscilátory v bodové řadě kmitají kolmo na směr šíření viz obr. 7.8. Elastické vlnění, u něhož je výchylka kmitů částic prostředí $u(x, t)$ v každém bodě stále kolmá ke směru šíření vlnění v tomto bodě, je **příčné vlnění** (transverzální vlnění).

7.5.2 Podélné postupné vlnění

Kmitá-li každý element hmotného prostředí kolem své rovnovážné polohy podél přímky rovnoběžné se směrem šíření vlnění v daném bodě, pak je to **podélné vlnění** (longitudinální vlnění).



Obr. 7.19

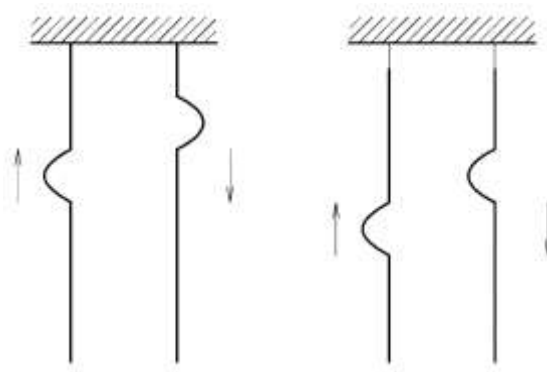
Okamžitá výchylka $u(x, t)$ hmotného elementu prostředí z jeho rovnovážné polohy je v případě podélného vlnění popsána stejnou rovnicí jako u vlnění příčného pouze s tím rozdílem, že výchylka $u(x, t)$ se nyní měří od rovnovážné polohy každého bodu ve směru řady, tj. ve směru šíření vlnění (obr. 7.19). Konstrukci znázornění takovéto vlny provedeme sklopením výchylek příčné vlny do podélného směru (do směru bodové řady), a to kladnou příčnou výchylku do směru šíření vlny, zápornou příčnou výchylku do opačného směru. **Hmotné elementy prostředí se budou zhušťovat a zředňovat.**

7.5.3 Odráž postupného vlnění

Každá bodová řada někde skončí a asi bychom si měli říci, co se stane na jejím konci. Přímá bodová řada může končit buď **pevným** anebo **volným** koncem. To lze demonstrovat lanem nebo gumovou hadicí, které jsou na jednom konci pevně anebo volně uchyceny. Vhodným trhnutím volným koncem hadice vytvoříme na hadici příčnou půlvlnu, která postupuje hadicí stálou rychlostí k druhému konci hadice. Vlněním, které dospěje na konec řady, vznikne odražená vlna, postupující řadou v opačném směru, čemuž se říká **odraz vlnění** (obr. 7.20).

Je-li konec řady **pevný**, nemůže kmitat, reakcí upevnění na dopadající vlnu vznikne síla, která změní výchylku posledního bodu řady v opačnou, jež se pak šíří řadou zpět. Na pevném konci řady se tedy působením síly upevnění odráží vlnění s opačnou fází (rozdíl fází dopadajícího a odraženého vlnění na pevném konci řady se rovná π).

Je-li naproti tomu poslední bod řady **volný** (např. konec hadice je upevněn tenkým provázkem, takže může kmitat), vlna se odráží se stejnou fází.



Obr. 7.20

7.6 Interference vlnění v přímé řadě

Interference vlnění je proces, při němž v prostředí, jímž se současně šíří dvě nebo více (dílčích) vln stejné fyzikální povahy, vzniká výsledná vlna. V prostředí nastává skládání kmitů, příslušejících jednotlivým vlněním, ve výsledný kmit a výslednou vlnu – nastává interference vlnění.

7.6.1 Interference dvou harmonických vlnění postupujících stejným směrem v přímé bodové řadě

Nechť dvě vlnění mají stejnou fázovou rychlost v a mají stejnou vlnovou délku λ i stejnou úhlovou frekvenci ω , či frekvenci f a periodu T . **Předpokládáme, že vlnění šířící se bodovou řadou jsou buď obě podélná, nebo příčná.** Výchylka výsledného vlnění v kterémkoliv bodě řady je rovna algebraickému součtu výchylek obou skládaných dílčích vlnění.

Oba dílčí kmity prvního bodu řady jsou harmonické a mají nenulovou počáteční fázi φ_{01} či φ_{02} a můžeme je popsat rovnicemi tvaru (7.1), tedy

$$u_1(0, t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}), \quad u_2(0, t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}), \quad (7.62)$$

kde A_1, A_2 jsou amplitudy výchylky dílčích kmitů. Dílčí vlny je tedy možné popsat rovnicemi

$$u_1(x, t) = A_1 \sin[(\omega t - kx) + \varphi_{01}] \quad u_2(x, t) = A_2 \sin[(\omega t - kx) + \varphi_{02}]. \quad (7.63)$$

Výchylka výsledného vlnění v místě x a v čase t bude dána součtem

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t). \quad (7.64)$$

7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

Nenulové vzájemné fázové posunutí $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01}$ dílčích kmitů prvního bodu řady vyvolá dráhový rozdíl dílčích vln. **Dráhový rozdíl** vlnění $\Delta x = x_2 - x_1$ (x_1 a x_2 měříme od libovolně zvoleného místa 0 na bodové řadě) je vzdálenost dvou bodů, jejichž dílčí kmit, příslušející jedné či druhé dílčí vlně, mají stejnou fázi. (viz obr. 7.21). Fázové posunutí a dráhový rozdíl spolu souvisí a dá se ukázat, že platí $\Delta\varphi = k\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$ (pokud je např. $\Delta\varphi = \pi$ tak $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$).

Nejprve si pro jednoduchost zvolme $A_1 = A_2 = A$. Výchylka výsledného vlnění je tedy

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) = A \sin[(\omega t - kx) + \varphi_{01}] + A \sin[(\omega t - kx) + \varphi_{02}]. \quad (7.65)$$

Použitím goniometrického vztahu $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ dostaneme:

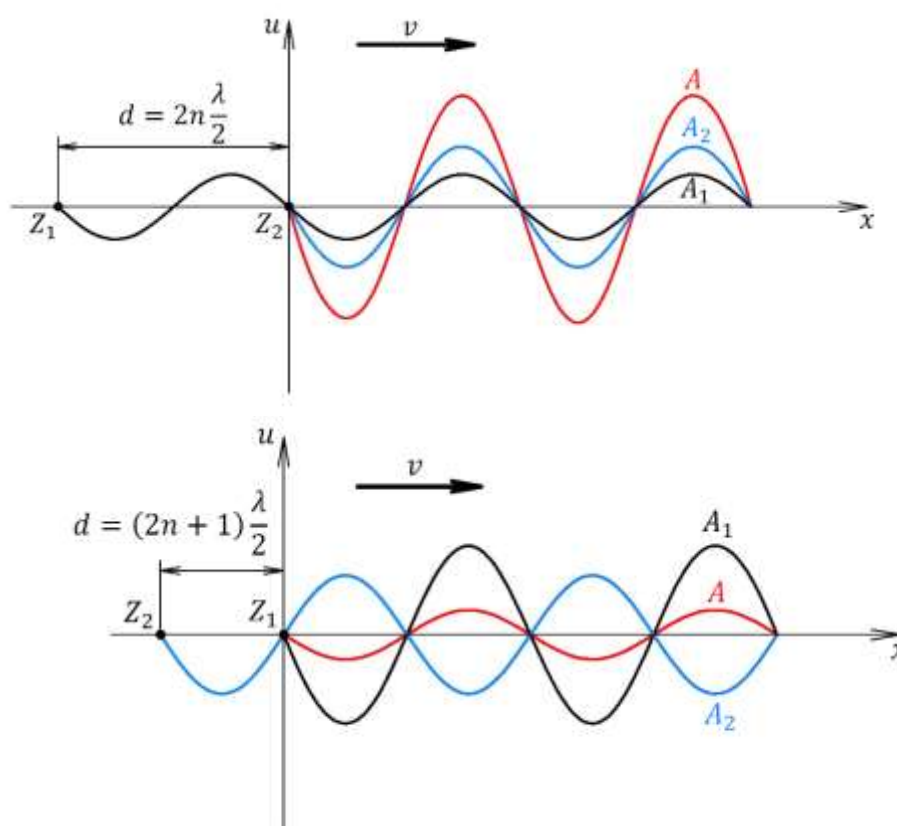
$$u(x, t) = 2A \sin\left(\omega t - kx + \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right). \quad (7.66)$$

$$u(x, t) = 2A \cos\left(\frac{-\Delta\varphi}{2}\right) \sin(\omega t - kx + \bar{\varphi}). \quad (7.67)$$

Výraz $\frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}$ jsme pro zjednodušení označili $\bar{\varphi}$ a dále platí $\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$, protože kosinus je funkce sudá

$$u(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \sin(\omega t - kx + \bar{\varphi}). \quad (7.68)$$

- Výsledné vlnění bude mít stejnou fázovou rychlost v , stejnou vlnovou délku λ i stejnou úhlovou frekvenci ω .
- Člen $2A \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$ je konstantní a určuje amplitudu výsledné vlny. Její velikost závisí na fázovém rozdílu $\Delta\varphi$.
- Bude-li $\left|\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\right| = 1$, mluvíme o **konstruktivní interferenci**, amplituda výsledných kmitů bude maximální. Vyřešením této rovnice dostaneme podmínku $\Delta\varphi = 2n\pi$, kde n je libovolné celé číslo. Dráhový rozdíl bude v tomto případě $\Delta x = n\lambda$.
- Bude-li naopak $\left|\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\right| = 0$, mluvíme o **destruktivní interferenci**, kdy amplituda výsledných kmitů bude nulová. Vyřešením této rovnice dostaneme podmínku $\Delta\varphi = (2n+1)\pi$, kde n je libovolné celé číslo. Dráhový rozdíl bude v tomto případě $\Delta x = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$ (obr. 7.21)



Obr. 7.21

V případě, že amplitudy dílčích vln jsou různé $A_1 \neq A_2$, jsou podmínky pro konstruktivní či destruktivní interferenci stejné. Při konstruktivní interferenci bude amplituda výsledných kmitů rovna $A_1 + A_2$ a při destruktivní nebude nulová, ale $|A_1 - A_2|$.

7.6.2 Interference dvou harmonických vlnění postupujících opačným směrem v přímé bodové řadě

Nechť se přímou bodovou řadou šíří stejnou fázovou rychlostí v v navzájem opačných směrech dvě postupná harmonická vlnění podélná nebo příčná, lineárně polarizovaná v téže rovině, stejné úhlové frekvence ω a stejné amplitudy $A_1 = A_2 = A$. Počátek $x = 0$ volíme v místě, v němž se obě proti sobě postupující vlny setkávají tak, že mají stejnou, např. nulovou fázi. Od tohoto okamžiku měříme čas t . Potom tyto dílčí vlny je možné popsat rovnicemi

$$u_1(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin(\omega t - kx), \quad u_2(x, t) = A \sin \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) = A \sin(\omega t + kx). \quad (7.69)$$

Hodnota $u_1(x, t)$ je výchylka vlny šířící se vpravo a $u_2(x, t)$ je výchylka vlny šířící se vlevo.

Výchylka výsledného vlnění, vzniklého interferencí obou vln, je rovna algebraickému součtu obou dílčích výchylek

7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

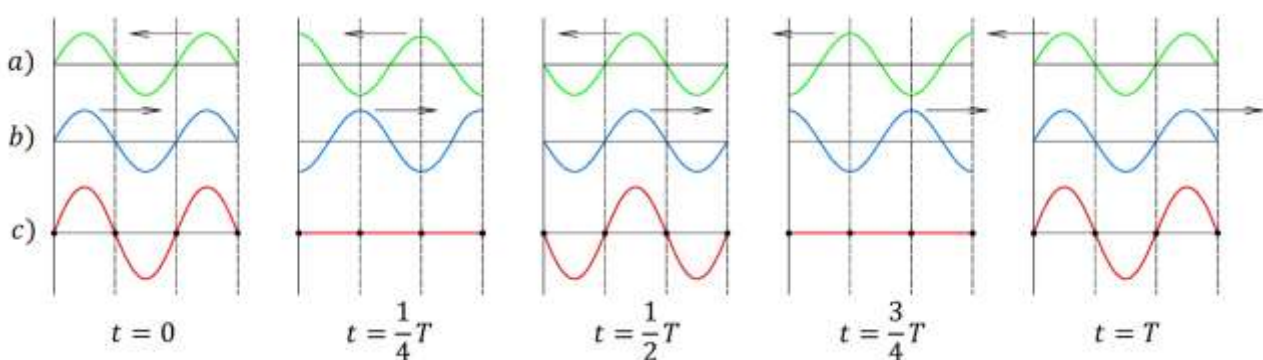
$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) = A \sin(\omega t - kx) + A \sin(\omega t + kx). \quad (7.70)$$

Použitím goniometrického vztahu $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ dostaneme:

$$u(x, t) = 2A \sin(\omega t) \cos(kx) = 2A \cos(kx) \sin(\omega t). \quad (7.71)$$

- Výsledné kmity všech bodů řady (člen $\sin(\omega t)$), mají stejnou úhlovou frekvenci ω jako harmonické kmity skládaných postupných vlnění.
- Amplituda závisí na x -ové souřadnici bodu, a je tedy v různých bodech řady různá (člen $2A \cos(kx)$). Výsledná vlna **nepostupuje** v jednom ani v opačném směru řady (osy x), proto tomuto vlnění říkáme úplné **stojaté vlnění**.
- Výsledná vlna má maximální amplitudu v bodech, kde platí $|\cos(kx)| = 1$, a tedy $kx = \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm n\pi$, kde $n = 0, 1, 2, \dots$. V místech $x_n = \pm n \frac{\lambda}{2}$ je tedy amplituda kmitů maximální a těmto místům říkáme **kmitny**.
- Výsledná vlna má minimální amplitudu v bodech, kde platí $\cos(kx) = 0$ a tedy $kx = \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm (2n+1) \frac{\pi}{2}$, kde $n = 0, 1, 2, \dots$. V místech $x_n = \pm (2n+1) \frac{\lambda}{4}$ je tedy amplituda kmitů minimální a těmto místům říkáme **uzly** (obr. 7.22).

Vzdálenost dvou sousedních uzlů je rovna $\frac{\lambda}{2}$, stejně tak jako vzdálenost dvou sousedních kmiten.



Obr. 7.22 (podle [4])

Stojaté vlnění vzniká v bodových řadách, které jsou omezené na obou stranách. Názorným příkladem takovéto bodové řady může být kytarová **struna**. Takovéto stojaté vlnění nazýváme také **chvěním**. Jak jsme již dříve uvedli, na pevném konci bodové řady dochází k odrazu vlny s opačnou fází. Výchylka odražené vlny je tedy opačná než výchylka dopadající vlny a tedy výsledná výchylka koncového bodu je nulová. Stojaté vlnění, ve kterém se skládá postupující a odražená

7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

vlna, má pak na pevném konci uzel. Na volném konci naopak vzniká odraz se stejnou fází, výchylka odražené vlny je stejná jako výchylka dopadající vlny. Stojaté vlnění, ve kterém se skládá postupující a odražená vlna, má pak na volném konci kmitnu.

Má-li bodová řada oba konce pevné, mohou na ní vzniknout jen takové stojaté vlny, které mají na obou koncích uzly. Na délce l bodové řady musí tedy být celistvý počet půlvln, takže

$$l = n \frac{\lambda_n}{2}, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.72)$$

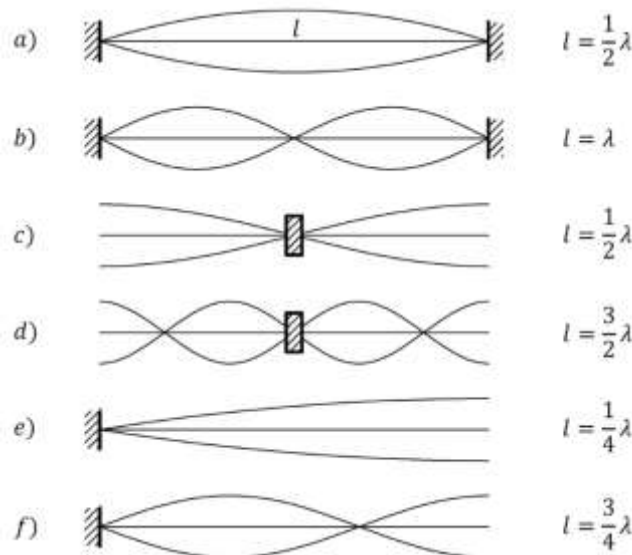
jak vidíme na obr. 7.23. Zde jsou znázorněny maximální výchylky bodů řady při příčných kmitech; při podélných kmitech tyto výchylky jenom sklopíme do bodové řady.

Bodová řada se tedy může chvět s frekvencemi

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2l} v, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.73)$$

kde v je rychlost šíření vlny bodovou řadou. Základní frekvence vznikne, je-li na bodové řadě jediná půlvlna ($n = 1$), jejíž vlnová délka dle (7.72) $\lambda_1 = 2l$ a příslušná frekvence $f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2l}$

(základní frekvence). **Vyšší harmonické** jsou kmity, jejichž frekvence je rovna celistvým násobkům základní frekvence f_1 .



Obr. 7.23

Ke stejným závěrům dojdeme i u bodové řady na obr. 7.23, jejíž oba konce jsou volné. Rozdíl je jen v tom, že na obou volných koncích řady má stojaté vlnění kmitny a základní chvění má uprostřed řady uzel místo kmitny.

7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

Má-li bodová řada jen jeden konec volný a druhý konec pevný, může kmitat tak, že na volném konci je kmitna a na pevném konci je vždy uzel, takže na bodové řadě se rozloží lichý počet čtvrtvln stojatého vlnění a tedy platí:

$$l = \frac{\lambda_n}{4}(2n-1), \quad f_n = \frac{v}{\lambda_n} = (2n-1) \frac{v}{4l} = (2n-1) f_1, \quad n=1,2,3,\dots \quad (7.74)$$

Právě popsány způsoby se mohou příčně chvět struny, podélně tenké tyče a vzduchové sloupce (např. v píšťálách).

7.6.3 Interference dvou harmonických vlnění blízkých frekvencí postupujících stejným směrem v přímé bodové řadě

Nechť se přímkou bodovou řadou šíří stejnou fázovou rychlostí v stejném směrem dvě postupná harmonická vlnění (podélná nebo příčná, lineárně polarizovaná v téže rovině) o stejné amplitudě A , se stejnou (nulovou) počáteční fází, ale s nepatrně odlišnými frekvencemi (nechť je např. $\omega_1 > \omega_2$). Dílčí vlny je tedy možné popsat rovnicemi

$$u_1(x,t) = A \sin(\omega_1 t - k_1 x), \quad u_2(x,t) = A \sin(\omega_2 t - k_2 x). \quad (7.75)$$

Výchylka výsledného vlnění v místě x a v čase t bude dána součtem

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = A \sin(\omega_1 t - k_1 x) + A \sin(\omega_2 t - k_2 x).$$

Upravením pomocí goniometrického vztahu $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ dostaneme:

$$u(x,t) = 2A \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x}{2} \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x}{2}$$

a po zavedení $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$, $k_1 - k_2 = \Delta k$, $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \bar{\omega}$, $\frac{k_1 + k_2}{2} = \bar{k}$

$$u(x,t) = 2A \cos \frac{\Delta\omega t - \Delta k x}{2} \sin(\bar{\omega} t - \bar{k} x).$$

 (7.76)

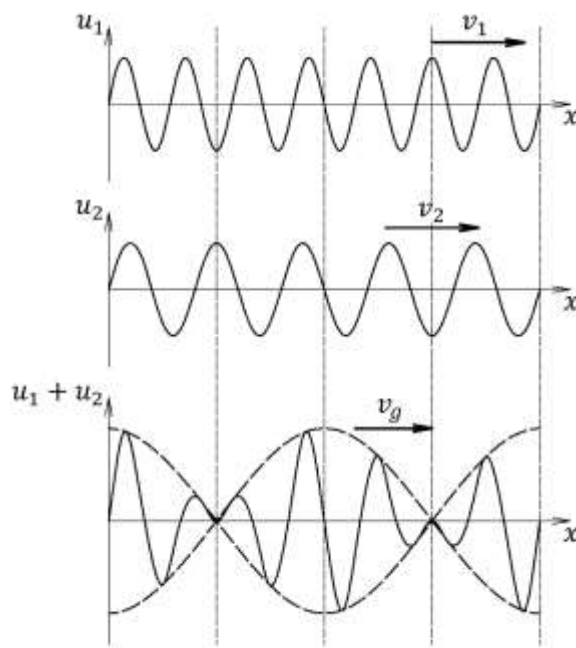
Podívejme se, jak kmitá první bod přímé bodové řady ($x = 0$)

$$u(0,t) = 2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \sin(\bar{\omega} t)$$

7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

Na tento výraz se v prvním přiblížení můžeme podívat jako na kmity s úhlovou frekvencí $\bar{\omega}$ (výraz $\sin(\bar{\omega} t)$) o amplitudě $2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2}$, která se mění s frekvencí $\frac{\Delta\omega}{2}$. Jelikož frekvence ω_1, ω_2 jsou blízké a předpokládali jsme, že $\omega_1 > \omega_2$ tak platí, že $\frac{\Delta\omega}{2} \ll \bar{\omega}$. Úhlová frekvence, se kterou se mění amplituda, je mnohem menší než úhlová frekvence $\bar{\omega}$. Kmity tohoto bodu vykazují rázy, viz odstavec 7.4.1.

Amplituda výsledného vlnění se mění a je závislá na vzdálenosti x , v důsledku čehož je vlnění rozděleno do tzv. grup (skupin vln). Na obr. 7.24 je zachycen pohyb grup vlnění prostorem. Fázevá rychlost výsledného vlnění se určí $v = \frac{\bar{\omega}}{k}$. Je to rychlost, s jakou se posouvají amplitudy A . Jednotlivé grupy vln postupují bodovou řadou rychlostí, která se nazývá grupová rychlost a určí se $v_{gr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$. Je to rychlost s jakou se posouvají amplitudy grup A_g .



Obr. 7.24

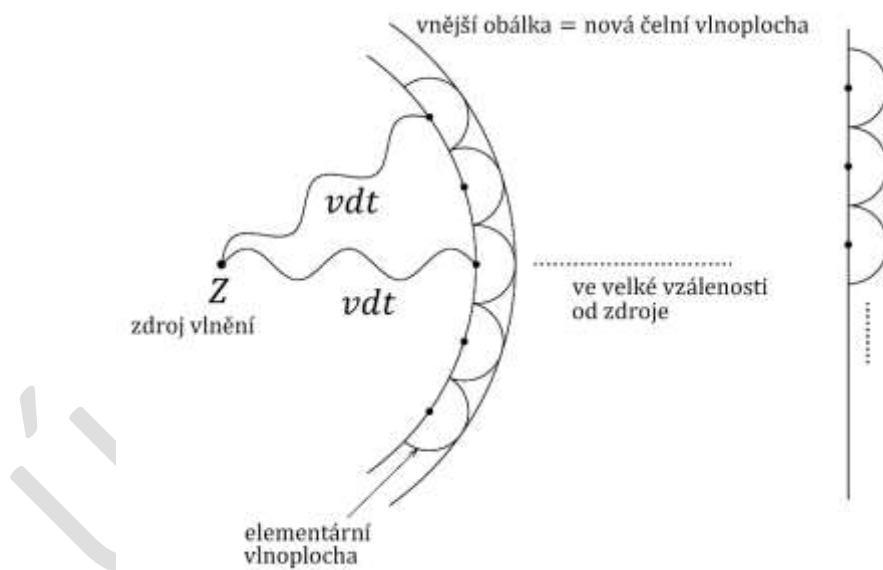
7.7 Šíření vln v prostoru

Z předchozí kapitoly tedy víme, že kmitá-li některá částice hmotného prostředí, pak působením elastických sil mezi sousedními částicemi prostředí se toto kmitání přenáší z kmitající částice (ze zdroje rozruchu, zdroje vlnění) na sousední částice. Prostedím se šíří kmity jeho jednotlivých částic, což nazýváme **elastické vlnění**. Šíří-li se vlnění v každém bodě prostoru stále v jednom směru, nazývá se **postupné vlnění**. Toto vlnění může být **příčné** (kmity částic prostředí jsou kolmé na směr šíření) a nebo **podélné** (kmity částic prostředí se dějí ve směru šíření).

Při šíření podélného elastického vlnění dochází ke střídavému zhuštění a zředění látky kolem míst nulových výchylek, což je způsobeno změnami tlaku, jimiž se podélné vlnění přenáší z jednoho

látkového elementu na sousední. Proto se podélné vlnění může šířit v pevných látkách, kapalinách i plynech. Příčné vlnění je přenášeno smykovými silami a proto se šíří jen v pevných látkách.

Necht' se ze zdroje vlnění šíří do všech směrů stejnou fázovou rychlostí v . Směr v němž se v daném místě vlnění šíří udává **paprsek**. V tomto směru se šíří i energie, kterou vlnění přenáší. Díky tomu tedy za určitý krátký časový interval dt vlnění dorazí do bodů ve vzdálenosti vdt od zdroje (obr. 7.25).



Obr. 7.25

Geometrickým útvarem, který tvoří množina všech takových bodů, je kulová plocha. Na této ploše také platí, že v daném okamžiku kmitají všechny body se stejnou fází. Tato plocha se nazývá vlnoplocha. Za další okamžik dt dostaneme další plochu, atd. V případě bodového zdroje a homogenního prostředí budou tyto **vlnoplochy kulové**. Vlnoplocha, která odděluje prostor, kam vlnění už dorazilo a kam ještě ne, se nazývá čelní vlnoplocha. Pokud se ovšem výrazně vzdálíme od zdroje, můžeme již vlnoplochy považovat za rovinné.

Rovinné vlnění (rovinná vlna) je charakterizována svazkem rovnoběžných paprsků. Vlnoplochy rovinného vlnění jsou vzájemně rovnoběžné roviny, kolmé k paprskům.

7.7.1 Huygensův-Fresnelův princip. Odraz a lom rovinného vlnění

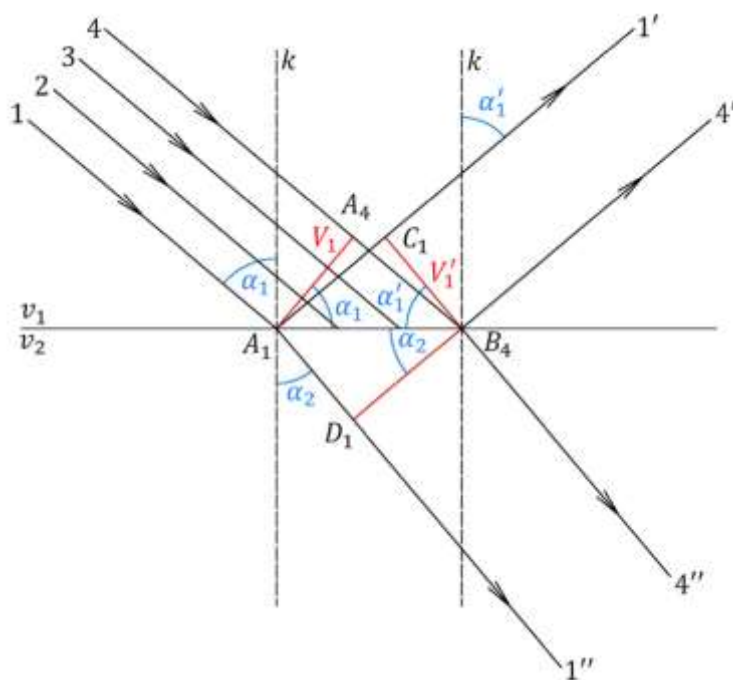
Z bodového zdroje se šíří vlnění ve vlnoplochách, které nazýváme elementárními vlnoplochami, jsou-li jejich rozměry relativně velmi malé. Za předpokladu, že existují elementární vlnoplochy, platí Huygensův - Fresnelův princip, který zní:

Vlnění se šíří prostorem tak, že všechny body prostoru, do nichž v daném okamžiku vlnění dospěje, se stávají bodovými zdroji elementárního vlnění, které se z každého bodu rozšíří na elementární vlnoplochy; nová čelní vlnoplocha je obálkou všech elementárních vlnoploch, ve směru ve kterém se vlnění šíří.

Odraz a lom rovinného vlnění

Mějme dvě různá prostředí, která jsou homogenní (tedy taková, že jejich vlastnosti jsou ve všech místech stejné, nezávisí na prostorové souřadnici) a izotropní (jejich vlastnosti nezávisí na směru šíření vlnění). Fázová rychlost šíření vlnění v prostředí 1 je v_1 a v prostředí 2 je v_2 . Na obr. 7.26 jsou zvoleny čtyři paprsky, které reprezentují šíření vlnění, a které jsou kolmé na vlnoplochy. Při dopadu vlny (vlnění) na rozhraní dvou různých prostředí se část vlny odrazí zpět do prostředí odkud přichází dopadající vlna a část vlny projde do druhého prostředí (nenastane-li úplný odraz). Vznikne tak odražená vlna, šířící se v prostředí 1 fázovou rychlostí v_1 a lomená vlna, šířící v prostředí 2 fázovou rychlostí v_2 . Odražená i lomená vlna zůstávají rovinnými vlnami, jejich frekvence jsou stejné jako frekvence dopadající vlny a paprsky charakterizující směry šíření dopadající, odražené a lomené vlny leží v jedné rovině.

- Úhel α_1 , který svírá dopadající paprsek 1 s kolmicí k rovině rozhraní v bodě A_1 (s kolmicí dopadu k), se nazývá **úhel dopadu** α_1 .
- Úhel α'_1 , který svírá odražený paprsek 1' s kolmicí dopadu k , se nazývá **úhel odrazu**. Úhel α_2 , který svírá lomený paprsek 1'' s kolmicí dopadu, se nazývá **úhel lomu**.



Obr. 7.26

Odraz (reflexe) vlnění. Určeme nyní směr odraženého paprsku. Ten je kolmý k vlnoploše V_1' odraženého svazku paprsků. Uvažujme paprsky 1 a 4 a čelní vlnoplochu V_1 . Vlna odražená v bodě A_1 dorazí do bodu C_1 v témž okamžiku, v němž dopadající vlna z bodu A_4 dospěje do bodu B_4 na rozhraní, takže délky $|A_4B_4| = |A_1C_1|$ jsou stejné. Pravoúhlé trojúhelníky $\triangle A_1A_4B_4$, $\triangle B_4A_1C_1$ jsou také stejné a tedy platí $\alpha_1 = \alpha_1'$. Můžeme nyní formulovat **zákon odrazu**:

Odražený paprsek leží v rovině dopadu dopadajícího paprsku a přitom úhel odrazu se rovná úhlu dopadu.

Lom (refrakce) vlnění. Při vyšetřování lomu postupujeme analogicky, jen musíme uvážit různé rychlosti šíření vlnění v obou prostředích. Za dobu τ nechť paprsek 4 urazí dráhu $|A_4B_4| = v_1\tau$. Za stejnou dobu poloměr elementární vlnoplochy šířící se z bodu A_1 do druhého prostředí bude roven $|A_1D_1| = v_2\tau$. Z pravoúhlých trojúhelníků $\triangle A_1A_4B_4$, $\triangle B_4A_1D_1$ určíme

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\frac{|A_4B_4|}{|A_1B_4|}}{\frac{|A_1D_1|}{|A_1B_4|}} = \frac{|A_4B_4|}{|A_1D_1|} = \frac{v_1\tau}{v_2\tau} = \frac{v_1}{v_2}, \quad (7.77)$$

Odvodili jsme tím Snellův zákon lomu. Poměr sinu úhlu dopadu k sinu úhlu lomu je roven poměru fázové rychlosti vlnění v_1 v prostředí 1 odkud vlnění dopadá a jeho fázové rychlosti v_2 v prostředí 2. Pro daná dvě homogenní izotropní prostředí je tento poměr stálý, nezávislý na úhlu dopadu.

7.7.2 Dopplerův jev

Z vlastní zkušenosti víme, že při vzájemném pohybu nějakého zdroje monotónního zvuku (troubící auto, sanitka) a přijímače (člověk) dochází ke změně pozorované frekvence zvuku. Tento jev, který pozorujeme, resp. slyšíme, se nazývá **Dopplerův jev**. Frekvence f_p periodického vlnění, kterou vnímá pozorovatel (přijímač), se liší od frekvence f_z kmitání zdroje, ze kterého se toto vlnění šíří.

Dopplerův jev nevzniká obecně jen u zvuku, ale i u elektromagnetických vln (světla). Využívá se v mnoha oborech, například pro měření rychlosti vozidel, letadel, v lékařské sonografii. V astronomii se Dopplerův jev projevuje posuvem spektrálních čar vyzařovaných vesmírnými tělesy. Pokud se tato tělesa vzdalují od Země, lze pozorovat takzvaný rudý posuv. Pokud se tělesa přibližují, můžeme pozorovat modrý posuv. Probereme nyní jednotlivé varianty, které mohou nastat.

1) Pozorovatel se pohybuje ke zdroji vlnění, který je v klidu v klidném prostředí.

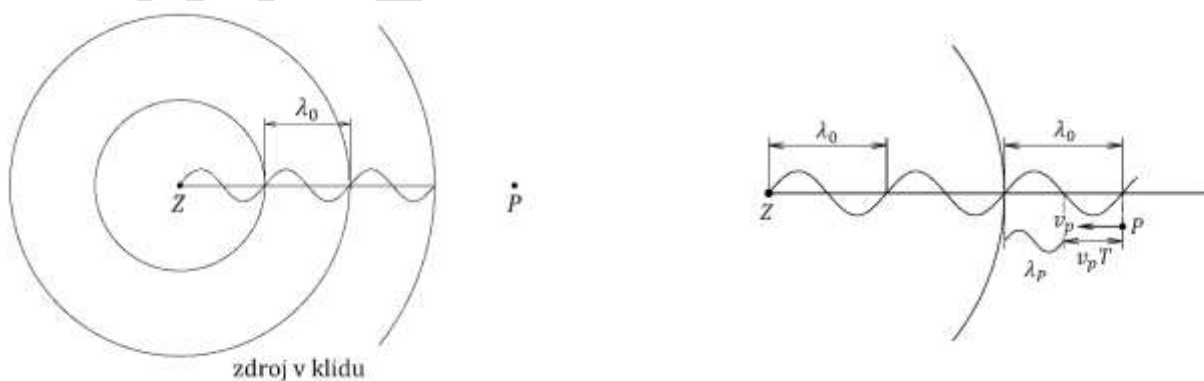
Předpokládejme, že pozorovatel se pohybuje rychlostí v_p ke klidnému zdroji vlnění, který vysílá vlnění frekvence f_0 , šířící se v klidném prostředí fázovou rychlostí v a nechť platí $v_p < v$ (obr. 7.27).

Během jedné periody se pozorovatel posune ke zdroji o vzdálenost $v_p T$, a tedy z jeho pohledu je vlnová délka zdroje o tuto vzdálenost kratší a tedy platí $\lambda_p = \lambda_0 - v_p T$. Upravením dostaneme

$$\frac{v}{f_p} = \frac{v}{f_0} - v_p \frac{1}{f_p} \quad \text{a tedy platí} \quad f_p = \frac{v + v_p}{v} f_0. \quad (7.78)$$

Pokud by se naopak pozorovatel od zdroje vzdaloval, byla by situace $\lambda_p = \lambda_0 + v_p T$, a tedy

$$f_p = \frac{v - v_p}{v} f_0. \quad (7.79)$$



Obr. 7.27

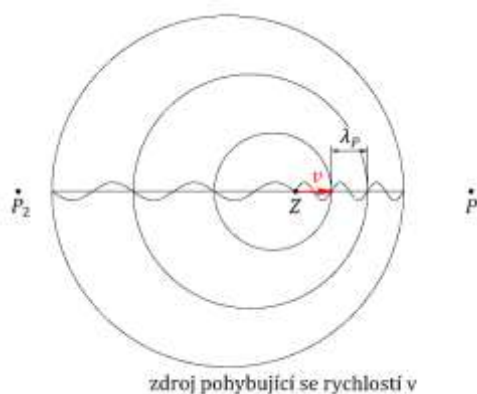
2) Zdroj vlnění se pohybuje vzhledem ke klidnému pozorovateli v klidném prostředí.

Předpokládejme, že zdroj vlnění se pohybuje rychlostí v_z ke klidnému pozorovateli a přitom vysílá vlnění frekvence f_0 , které se šíří klidným prostředím fázovou rychlostí v . Na obr. 7.28 vidíme vlnoplochy ze zdroje, který se pohybuje k pozorovateli. Ve směru pohybu zdroje dochází k nahuštění vlnoploch. Vlnová délka je tedy kratší o vzdálenost, kterou urazil zdroj vlnění během jedné periody. Platí tedy $\lambda_p = \lambda_0 - v_z T$. Upravením dostaneme $\frac{v}{f_p} = \frac{v}{f_0} - v_z \frac{1}{f_0}$ a z toho plyne:

$$f_p = \frac{v}{v - v_z} f_0 . \quad (7.80)$$

Pokud by se zdroj vlnění od pozorovatele naopak vzdaloval (pozorovatel P_2 na obrázku), vlnoplochy jsou zředěnější. Obdobným odvozením bychom dostali vztah pro frekvenci při vzdalování zdroje od pozorovatele.

$$f_p = \frac{v}{v + v_z} f_0 . \quad (7.81)$$



Obr. 7.28

V případě pohybu jak zdroje vlnění, tak pozorovatele můžeme napsat obecně

$$f_p = \frac{v \pm v_p}{v \pm v_z} f_0 , \quad (7.82)$$

kde rychlost pozorovatele v_p je kladná při pohybu ke zdroji vlnění a záporná při pohybu od zdroje vlnění. Stejně je to se znaménkem rychlosti zdroje vlnění v_z (kladná při pohybu zdroje vlnění k pozorovateli).

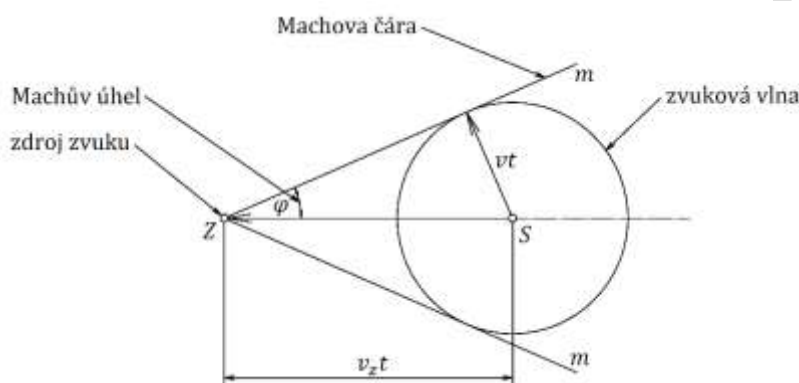
7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

Zdroj vlnění se pohybuje rychlostí větší než je rychlost šíření vlnění $v_z > v$

V tomto případě nastane situace, kdy rychle se pohybující zdroj předbíhá vytvářené vlnění a vznikne vlnové pole na obr. 7.29. Čelní vlnoplocha má tvar pláště kužele, v jehož vrcholu je zdroj vlnění. (tzv. *Machův kužel*). Pro úhel φ platí

$$\sin \varphi = \frac{v}{v_z} = \frac{1}{Ma}. \quad (7.83)$$

kde Ma je Machovo číslo. Příkladem tohoto jevu je rázová vlna za letadlem, letícím nadzvukovou rychlostí, nebo vlny na vodní hladině za rychle jedoucím člunem.



Obr. 7.29

7.7.3 Vlnová rovnice

Doposud studovali chování vlnění, ale neřešili jsme jeho příčiny. Vlnu jsme popsali funkcí

$u(x, t) = u_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = u_0 \sin (\omega t - kx)$ popisující rovinnou vlnu šířící se ve směru osy x .

Vlnovou funkci lze získat jako řešení vlnové rovnice.

Vlnová rovnice je rovnice vycházející z již známých fyzikálních zákonů a principů. Nejprve si ukážeme, jak tato vlnová rovnice vypadá.

Vlnová rovnice je parciální diferenciální rovnice druhého řádu, které vyhovují funkce popisující vlnění. Nejjednodušší tvar má vlnová rovnice pro netlumené vlnění, šířící se homogenním izotropním prostředím konstantní fázovou rychlostí o velikosti v . Pro jednoduchost výpočtu předpokládejme, že rovinné harmonické vlnění podélné nebo příčné lineárně polarizované se šíří rychlostí v ve směru osy x , takže výchylka hmotného elementu $u(x, t)$ z jeho rovnovážné polohy je

popsána rovnicí $u(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$. Nyní vypočítáme druhé parciální derivace funkce

$u(x, t)$ jak podle času t , tak podle souřadnice x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\omega^2 A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = -\omega^2 u(x, t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{\omega^2}{v^2} A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = -\frac{\omega^2}{v^2} u(x, t) .\end{aligned}$$

Porovnáním posledních výrazů v těchto dvou relacích dostaneme **vlnovou rovnici** pro vlnění, šířící se ve směru osy x

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \quad (7.84)$$

Lze ukázat, že pro rovinnou vlnu šířící se v obecném směru prostorem platí

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \text{nebo ekvivalentní zápis} \\ \Delta u &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} .\end{aligned}} \quad (7.85)$$

V druhém případě jsme zavedli Laplaceův diferenciální operátor $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, který je

roven skalárnímu součinu Hamiltonova operátoru nabla $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ s ním samým, tedy

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \quad (7.87)$$

Rovnice (7.86) se nazývá **vlnová rovnice**. Jako diferenciální rovnice platí v limitě pro velmi malou část prostoru, v němž můžeme jakoukoliv obecnou vlnu považovat za rovinnou, takže lokálně popisuje vlnu jakéhokoliv tvaru. **Rovnice nezahrnuje tlumení a platí tedy jen pro netlumené vlny.**

Rovnice tvaru (7.86) platí i pro veličinu vektorové povahy, tj. pro obecné příčné vlnění mechanické nebo elektromagnetické vlnění, které je popsáno vektorovou veličinou $\vec{u}(x, y, z, t)$. Vlnová rovnice má tvar:

$$\Delta \vec{u} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} , \quad \text{nebo} \quad \Delta(u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) . \quad (7.88)$$

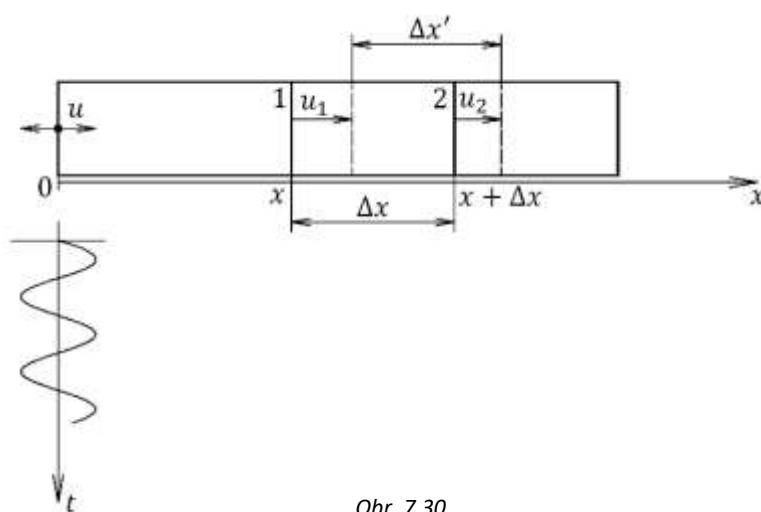
Jevy popsané stejným typem diferenciálních rovnic jsou si fyzikálně podobné. Setkáme se s ní nejen v mechanice, ale i v optice (světlo je elektromagnetické vlnění), případně kvantové fyzice. Veličina charakterizující fyzikální pole je popsána vlnovou rovnicí (7.88). Časová změna této

7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

veličiny v některém místě pole nezůstává lokalizována v tomto místě, ale jako vlnění uvažované veličiny se šíří do okolního prostoru. Přitom konstanta úměrnosti $\frac{1}{v^2}$ je rovna převrácené hodnotě čtverce fázové rychlosti šíření vlnění.

7.7.4 Podélné vlny v tenké tyči

Mějme nyní tenkou tyč, jejíž jeden konec jsme podélně rozkmitali. Příčné elementy tyče kmitají kolem rovnovážných poloh (obr. 7.30).



Obr. 7.30

K odvození podélných vln v tenké tyči vyjdeme z Hookova zákona pro tah, tlak a z pohybové rovnice (2. Newtonova zákona síly). Vezmeme si dva příčné elementy (značíme 1,2), které jsou velmi blízko od sebe a nechť poloha elementu 1 je rovna poloze x od rozkmitaného konce tyče.

V dalším řešení postupujeme následujícím způsobem:

- Nechť v klidu byly tyto elementy ve vzdálenosti Δx . Když oba elementy kmitají kolem rovnovážných poloh, je jejich vzdálenost v daný okamžik t rovna $\Delta x'$ a výchylka elementu 1 je u_1 , výchylka elementu 2 je u_2 . Z obrázku je vidět, že platí $\Delta x - u_1 = \Delta x' - u_2$. Po upravení dostaneme pro změnu vzdálenosti elementů 1,2 vztah:

$$\Delta x' - \Delta x = u_2 - u_1 = \Delta u. \quad (7.89)$$

Relativní změna vzdálenosti elementů 1,2 (relativní prodloužení) se určí jako

$$\frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{u_2 - u_1}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (7.90)$$

- Lokální relativní změnu délky tyče v místě x můžeme určit jako limitu situace, kdy elementy přibližujeme k sobě, a tedy $\Delta x \rightarrow 0$:

7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon(x, t) \quad (7.91)$$

Tuto veličinu označíme jako relativní prodloužení v místě x a v čase t .

- V každém příčném průřezu tyče je v daném okamžiku t obecně jiné místní poměrné prodloužení $\varepsilon(x, t)$ a proto dle Hookova zákona i jiné napětí

$$\sigma_n = E \varepsilon(x, t) = E \frac{\partial u}{\partial x} . \quad (7.92)$$

V tom je rozdíl od prostého namáhání tyče tahem, kdy je ve všech průřezích tyče stejné ε i stejné σ_n .

- Na vybraný úsek tyče omezený průřezy 1 a 2 působí ve směru osy x výsledná síla

$$F = \sigma_2 S - \sigma_1 S = SE(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) , \quad (7.93)$$

kde S je průřez tyče.

- Posunutí (výchylka) průřezu tyče ve směru osy x je $u(x, t)$, takže jeho rychlost je $\frac{\partial u}{\partial t}$ a

zrychlení je rovno $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

- Pro vybraný úsek tyče průřezu S , délky Δx o hmotnosti $\Delta m = \Delta V \rho = S \Delta x \rho$, kde ρ je hustota materiálu tyče, úpravou rovnice (7.93) dostaneme

$$F = S(\sigma_2 - \sigma_1) = SE(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = SE \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\Delta x} \Delta x . \quad (7.94)$$

Jsou-li elementy 1 a 2 dostatečně blízko sebe, můžeme opět přejít k limitě

$$F = S(\sigma_2 - \sigma_1) = SE(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = SE \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\Delta x} \Delta x . \quad (7.95)$$

A s použitím vztahů (7.91 a 7.92) dostaneme konečný výsledek

$$\begin{aligned} F &= SE \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Delta x = SE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x = \Delta m a = \rho \Delta V a = \underbrace{S \Delta x \rho}_{\text{pohybová rovnice}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} . \end{aligned} \quad (7.96)$$

vlnová rovnice (7.84)

Pro rychlost šíření podélného vlnění v tenké elastické tyči tedy platí:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} . \quad (7.97)$$

7.7.5 Podélné vlny v kapalině nebo plynu

Zobecněním vztahu (7.97) docházíme k tomu, že rychlost šíření mechanického vlnění závisí na setrvačných a elastických vlastnostech prostředí. Můžeme tedy symbolicky napsat:

$$v = \sqrt{\frac{\text{elastické vlastnosti}}{\text{setrvačné vlastnosti}}} \quad (7.98)$$

K odvození podélných vln v kapalině či plynu se opět používá 2. Newtonův zákon ve spojení s elastickými vlastnostmi kapalin a plynů. Elastické vlastnosti tekutin (kapalin a plynů) charakterizuje **objemová stlačitelnost** γ . Tato veličina je definována jako

$$\gamma = -\frac{\frac{\Delta V}{V}}{\Delta p} , \quad (7.99)$$

kde $\frac{\Delta V}{V}$ je relativní změna objemu při malé změně tlaku Δp . Když tekutinu stlačíme (zvýšíme uvnitř tekutiny tlak o Δp), tak se zmenší objem o ΔV (zmenšení proto znaménko mínus), resp. dojde k relativní změně objemu $-\frac{\Delta V}{V}$. Převrácená hodnota objemové stlačitelnosti se nazývá modul objemové pružnosti a značíme ho $K = \frac{1}{\gamma}$.

Tabulkové hodnoty pro vodu a vzduch:

Voda	$K = 2,36 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
Vzduch	$K = 4,85 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Rychlost šíření podélného vlnění v sloupci tekutiny se tedy analogicky se vztahem (7.98) určí ze vztahu:

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} . \quad (7.100)$$

V případě většiny plynů se dá modul objemové pružnosti K vyjádřit pomocí Poissonovy konstanty

$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_{mp}}{C_{mV}}$ (plyne z termodynamiky) a platí $v = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}$. Při tomto odvození se vychází z toho, že změny tlaku v plynu při vysokých frekvencích probíhají relativně rychle, a proto se při nich

nestačí vyrovnat teploty mezi sousedními elementy, a z tohoto důvodu tyto změny lze považovat za adiabatické a platí Poissonova rovnice pro adiabatický děj.

7.8 Akustika

Akustika je obor fyziky, který se zabývá vlastnostmi zvukového vlnění (zvuku), jeho vznikem, šířením a působením na látku a jeho účinky na sluchové orgány.

Zvukem rozumíme sluchový vjem sluchového orgánu i jeho objektivní příčinu, jíž je mechanické kmitání a jím buzené mechanické, elastické vlnění prostředí, které je lidský sluchový orgán schopen přijmout a mozek zpracovat ve sluchový vjem. Zvuk se šíří jen v látce, v pružném prostředí, tj. nešíří se ve vakuu.

V tuhých látkách se šíří vlny podélné i příčné, v kapalinách a plynech se šíří jen vlny podélné.

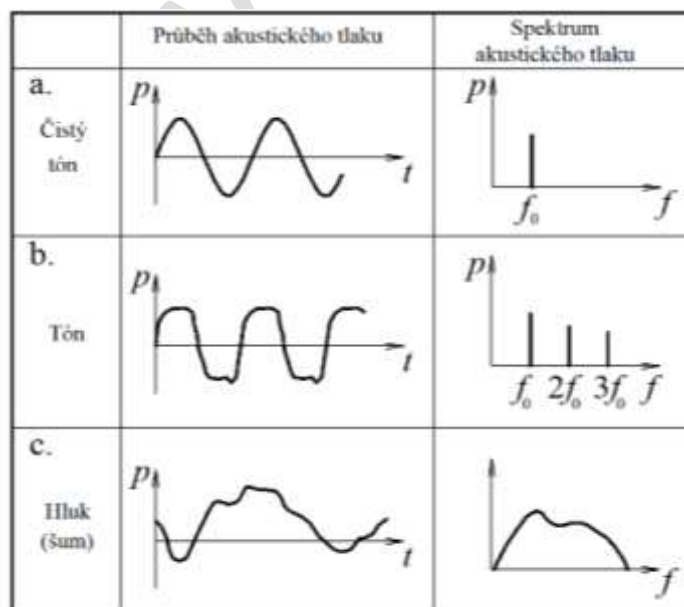
Normální lidské ucho je schopno zaregistrovat zvukové vlny o frekvencích řádově v rozsahu 16 Hz – 20000 Hz. Zvukové vlnění o frekvencích menších než 6 Hz nazýváme infrazvuk a zvukové vlnění o frekvencích vyšších než 20000 Hz ultrazvuk.

Zvuk můžeme rozdělit také podle průběhu akustického tlaku. Z předchozího výkladu již víme, že při šíření podélného vlnění v tekutinách dochází ke změnám tlaku, resp. zvuk je podélné vlnění a můžeme ho tedy popsat změnami akustického tlaku (obr. 7.31).

Čistý tón = akustický tlak je harmonickou funkcí času (sinus, kosinus).

Tón = akustický tlak je periodickou, ale ne harmonickou funkcí času.

Hluk, šum apod. = akustický tlak se mění nepravidelně s časem.



Obr. 7.31 [1]

Fourier ukázal, že kmity libovolné periodické fyzikální veličiny s periodou $T_0 = \frac{1}{f_0}$, lze vyjádřit jako součet **základní harmonické složky** (stejně periody T_0 zvané základní perioda) a **vyšších harmonických složek** $f_k = \frac{1}{T_k} = k f_0$, kde $k = 2, 3, 4, \dots$

Závislost amplitudy akustického tlaku jednotlivých složek složených kmitů na jejich frekvenci se zobrazuje graficky. Takový graf se nazývá **amplitudové spektrum kmitů**.

Objektivní výška tónu je určena frekvencí f_0 . Složky vyšších harmonických určují zabarvení tónu. Toto zabarvení určuje rozdíl mezi stejným tónem zahraným na klavír a housle či jiný hudební nástroj.

V dalším výkladu budeme uvažovat jen zvukové vlny podélné, šířící se bez tlumení v homogenním izotropním prostředí. Z obecného výkladu o vlnění víme, že takou vlnu lze popsat rovnicí odpovídající rovinné vlně. Při podélném harmonickém vlnění šířícím se ve směru osy x dochází k podélným výchylkám objemového elementu prostředí a ty můžeme popsat rovnicí

$$u(x, t) = u_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (7.101)$$

Tato výchylka se nazývá akustická výchylka. Objemové elementy prostředí při vlnění kmitají kolem rovnovážných poloh a mění se rychlost jejich pohybu. Tuto rychlost určíme jako derivaci výchylky podle času a tedy:

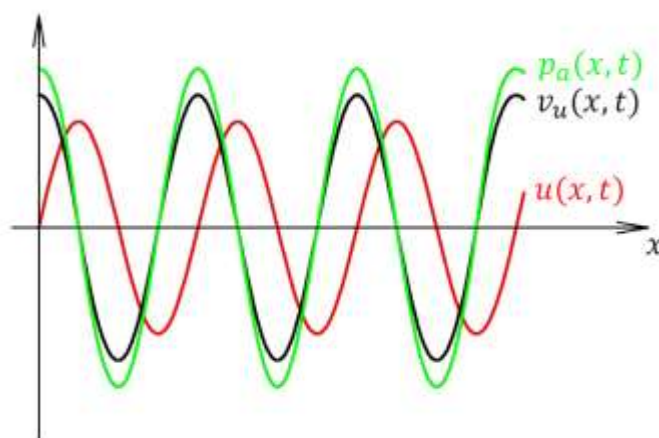
$$v_u = \frac{\partial u}{\partial t} = \omega u_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = v_{u0} \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (7.102)$$

Pozor! Nezaměňujeme tuto rychlost objemového elementu prostředí za fázovou rychlost v šíření vlny tímto prostředím.

Při šíření vlnění prostředím dochází nejen k podélným výchylkám objemového elementu prostředí, ale také k zhušťování a zředňování prostředí, které lze charakterizovat změnami akustického tlaku, jehož průběh lze popsat funkcí:

$$p_a = p_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = \rho v \omega u_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (7.103)$$

Z rovnic pro výchylku, rychlost a akustický tlak v místě x a v čase t vyplývá, že výchylka je posunuta o $\frac{\pi}{2}$ oproti akustickému tlaku a rychlosti objemových elementů prostředí (posun mezi funkcí sinus a kosinus, obr. 7.32). Frekvence (perioda) změn výchylky elementu prostředí je stejná jako u rychlosti elementů prostředí, či změn akustického tlaku.



Obr. 7.32

V souvislosti s dalším výkladem zavedeme efektivní hodnotu akustického tlaku, která je definovaná jako střední hodnota druhé mocniny akustického tlaku p_a v tomto místě

$$p_e^2 = \frac{1}{T} \int_0^T p_a^2 dt = \frac{p_0^2}{2} \quad (7.104)$$

$$p_e = \frac{p_0}{\sqrt{2}} \quad (7.105)$$

7.8.1 Intenzita vlnění (zvuku)

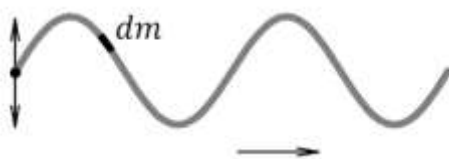
Kmitající částice prostředí, jímž se šíří zvukové (elastické) vlnění, mají určitou kinetickou energii a deformační potenciální energii. **Zvuková (akustická) energie** E_a je součtem celkové kinetické energie kmitavých pohybů částic prostředí, které konají při šíření zvukové vlny a deformační energie příslušející deformacím elementů prostředí, k nimž přitom dochází.

Při šíření postupného vlnění si kmitající částice prostředí předávají kinetickou (potenciální) energii, a tak se tato energie přenáší prostorem ve směru šíření vlnění. Jak již víme z mechaniky, výkon je definovaný jako práce vykonaná za čas. Nyní si obdobně definujeme **akustický výkon** jako energii vyzářenou ze zdroje za čas, a tedy:

$$P = \frac{dE}{dt} \quad (7.106)$$

Může se jednat také o energii přenesenou prostorem či dopadající na povrch za čas. Jednotkou akustického výkonu je $[P] = W$.

Mějme element hmotnosti dm vlnící se struny (obr. 7.33).



Obr. 7.33 (podle [2])

Podle (7.14) určíme její mechanickou energii. Definujeme-li $\lambda = \frac{m}{l}$ jako délkovou hustotu struny, kde m je hmotnost struny délky l , potom element struny délky dx bude mít hmotnost $dm = \lambda dx$. Výkon přenášený vlněním lze určit podle (7.106).

$$dE = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} dm \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \lambda dx \omega^2 A^2 \quad (7.107)$$

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \lambda \frac{dx}{dt} \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \lambda v \omega^2 A^2 .$$

Tento konkrétní případ lze zobecnit: výkon přenášený vlněním závisí na

- vlastnostech zdroje (na druhé mocnině amplitudy a druhé mocnině úhlové frekvence)
- vlastnostech prostředí, ve kterém se šíří (rychlost šíření, délková hustota)

Vlnění šířící se prostředím tedy přenáší energii, ale nedochází k přenosu hmoty.

Přenos energie prostorem nemusí být v prostředí všude stejný, např. při poslechu hudby v některých místech hudebního sálu slyšíme lépe či hůře (v ose reproduktorů, mimo osu reproduktorů, apod.). Zavedeme proto veličinu, která zohlední tuto skutečnost a nazývá se **intenzita vlnění (zvuku) I** .

Definujeme ji jako energii přenesenou vlněním za jednotku času plochou kolmou na směr šíření vlnění.

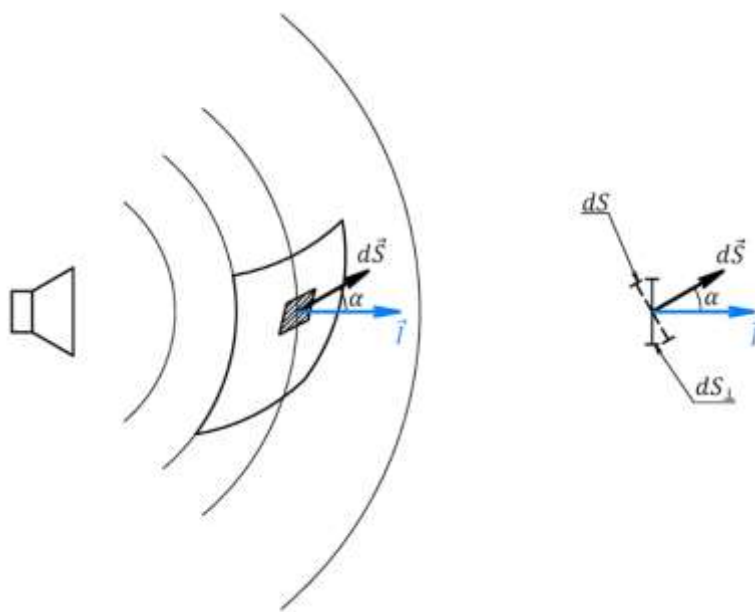
$$I = \frac{dE}{dS_{\perp} dt} = \frac{dP}{dS_{\perp}} , \quad (7.108)$$

kde dP je elementární akustický výkon a $dS_{\perp}$ je elementární ploška kolmá na směr šíření. Jednotkou **intenzity vlnění** je $[I] = \text{W} \cdot \text{m}^{-2} = \text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$.

S využitím vztahů 7.104, 7.105 a 7.107 můžeme ještě vztah 7.108 upravit:

$$dE = \frac{1}{2} \rho dV \omega^2 u_0^2 = \frac{1}{2} \rho S_{\perp} dx \omega^2 u_0^2 \quad (7.109)$$

$$I = \frac{dE}{S_{\perp} dt} = \frac{\frac{1}{2} \rho S_{\perp} dx \omega^2 u_0^2}{S_{\perp} dt} = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 u_0^2 = \frac{p_0^2}{2 \rho v} = \frac{p_e^2}{\rho v} .$$



Obr. 7.34

Mezi elementární ploškou dS , která není kolmá na směr šíření a ploškou kolmou na směr šíření $dS_{\perp}$ podle obr. 7.34 platí vztah $dS_{\perp} = dS \cos \alpha$. Pokud přiřadíme intenzitě vlnění směr, v němž dochází k přenosu energie a zavedeme tak **vektor intenzity vlnění** $\vec{I}$.

Podle vztahu (7.108) platí $dP = I dS_{\perp}$ a tedy můžeme psát:

$$dP = I dS_{\perp} = I dS \cos \alpha = \vec{I} \cdot d\vec{S} ,$$

kde $\vec{I}$ je vektor intenzity vlnění a $d\vec{S}$ je vektor elementární plochy (velikost vektoru je plocha dS a směr vektoru normála k této ploše).

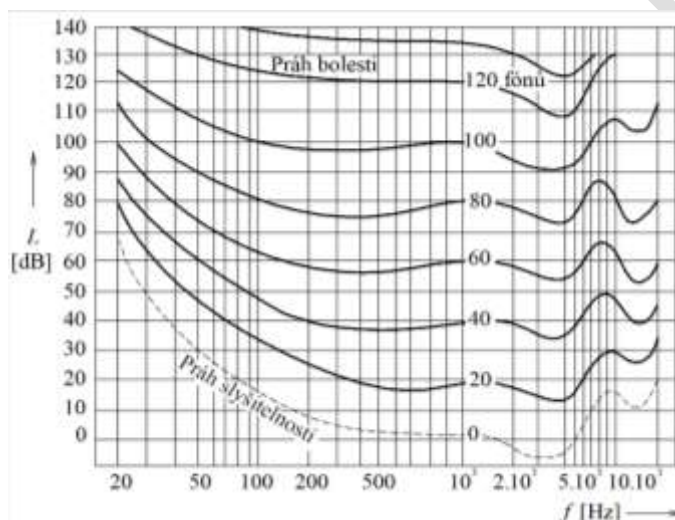
Akustický výkon procházející obecně velkou plochou S určíme ze vztahu

$$P = \iint_S \vec{I} \cdot d\vec{S} .$$

(7.110)

7.8.2 Subjektivní a objektivní síla zvuku

Aby v lidském uchu vznikl zvukový vjem, musí akustický tlak či intenzita zvuku dosáhnout určité hodnoty. Hodnoty těchto veličin, při nichž začínáme zvuk vnímat, se nazývají dolní mez slyšitelnosti nebo práh slyšitelnosti. Tyto hodnoty jsou pro čisté tóny různých frekvencí různé. Je-li efektivní akustický tlak tónu menší než tyto tzv. dolní prahové hodnoty, není tón slyšitelný. Prahové hodnoty efektivního akustického tlaku tónů různých frekvencí leží na křivce, zvané **dolní mez slyšitelnosti nebo práh slyšitelnosti** (obr. 7.35). Obor slyšitelných zvuků je omezen i na straně velkých intenzit (velkých akustických tlaků), neboť překročí-li intenzita (akustický tlak) jistou mez, máme v uchu pocit bolesti a přestává normální vnímání zvuku. Tyto horní mezní hodnoty akustického tlaku (intenzity zvuku) jsou pro čisté tóny různé frekvence různé a leží na křivce zvané **horní mez slyšitelnosti nebo práh bolesti**. Oblast mezi prahem bolesti a prahem slyšitelnosti v celém rozsahu slyšitelných frekvencí nazýváme sluchovým polem.



Obr. 7.35 [1]

Nejširší obor slyšitelnosti přísluší čistému tónu frekvence 1000 Hz s prahovými hodnotami efektivního akustického tlaku $2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ a 20 Pa , což odpovídá prahovým hodnotám intenzity zvuku $10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ a $1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Tento čistý tón ($f = 1000 \text{ Hz}$) se používá v akustice jako srovnávací (referenční) tón, takže spodní **prahové hodnoty** intenzity I_0 a efektivního akustického tlaku p_{e0} jsou rovny

$$p_{e0} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}, \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}. \quad (7.111)$$

Vztah mezi velikostí podnětu a velikostí fyziologického vjemu vyjadřuje psychofyzický **Weberův-Fechnerův zákon**. Mění-li se fyzikální podněty působící na naše smysly řadou geometrickou, vnímáme jejich změnu v řadě aritmetické. Tento zákon platí pro sluchové i zrakové vjemy jen velmi přibližně. Toto zjištění bylo důvodem pro srovnávání intenzit sluchového pole v logaritmické

stupnici. Intenzitu I vyšetřovaného zvuku porovnáváme se spodní prahovou intenzitou I_0 referenčního tónu frekvence $f = 1000$ Hz.

Zavádíme veličinu, která se nazývá hladina intenzity zvuku. **Hladina intenzity zvuku B** se určí jako (dosadíme za intenzitu I ze vztahu (7.110)) :

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \left(\frac{\frac{p_e^2}{\rho v}}{\frac{p_{e0}^2}{\rho v}} \right) = 20 \log \frac{p_e}{p_{e0}} \quad . \quad (7.112)$$

a udává se v jednotkách dB (decibel).

Příklad ilustrující Weberův-Fechnerův zákon: Zvýšili jsme intenzitu zvuku na dvojnásobek počáteční intenzity a potom ještě na trojnásobek počáteční intenzity. Náš sluch bude ovšem vnímat změny odpovídajícím změnám hladin intenzity zvuku:

$$\begin{aligned} B_1 &= 10 \log \frac{I}{I_0} \\ B_2 &= 10 \log \frac{2I}{I_0} = 10 \log 2 + 10 \log \frac{I}{I_0} = 3 + 10 \log \frac{I}{I_0} = 3 + B_1, \\ B_3 &= 10 \log \frac{3I}{I_0} = 10 \log 3 + 10 \log \frac{I}{I_0} = 4,77 + 10 \log \frac{I}{I_0} = 4,77 + B_1, \end{aligned}$$

kde B_1 je hladina hlasitosti na počátku a B_2, B_3 po zesílení. Hladiny intenzity zvuku se zvýší výrazně méně oproti navýšení intenzity zvuku (dvojnásobek či trojnásobek).

Hladina intenzity zvuku je **objektivní fyzikální veličina**, charakterizující akustické pole. Naše sluchové orgány nejsou stejně citlivé pro všechny frekvence oblasti slyšitelných tónů. Dva tóny různé frekvence, ale stejné intenzity vnímá náš sluch různě hlasitě. Z tohoto důvodu zavádíme **subjektivní veličinu hladiny hlasitosti**. Je to míra pro subjektivně vnímané hlasitosti tónů různých frekvencí. Jednotkou hladiny hlasitosti je 1 fón (1 Ph). Jsou zavedeny tak, že hladina hlasitosti referenčního tónu (1000 Hz) je číselně rovna jeho hladině intenzity. Pro tóny jiných frekvencí se hladiny hlasitosti srovnávají s těmito hladinami hlasitosti referenčního tónu (obr. 7.35). Např. abychom vnímali tón o frekvenci 20 Hz stejně jako tón o frekvenci 1000 Hz a intenzitě 60 dB musí mít tón 20 Hz intenzitu 100 dB (křivka odpovídající 60 Ph v grafu (obr. 7.35).

Příklady intenzity zvuku v Tab. 7.1.

7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

Tabulka 7.1 Intenzita zvuku

	Intenzita zvuku [dB]
práh slyšitelnosti	0
běžný hovor, pouliční hluk	50-60
vrtačky, stroje	100-110
letadlo, koncert	120
práh bolesti	130

Příklady:

1) Harmonické kmitání hmotného bodu je popsáno rovnicí $x(t) = 0,05 \sin(12,57t)$ m. Určete amplitudu, frekvenci, periodu kmitů, maximální rychlost a zrychlení hmotného bodu.

Řešení:

Porovnáním s obecnou rovnicí kmitů $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ dostaneme $A = 0,05$ m, $\omega = 12,57$ s⁻¹.

Ze vztahu $f = \frac{\omega}{2\pi} = 2$ Hz a $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 0,5$ s. Zderivováním rovnice amplitudy dostaneme

vztah pro průběh rychlosti $v_x(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$. Pro amplitudu rychlosti platí

$v_{x,\max} = A\omega = 0,63$ m.s⁻¹. Zderivováním rovnice rychlosti dostaneme vztah pro průběh zrychlení

$a_x(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$. Pro amplitudu zrychlení platí $a_{x,\max} = A\omega^2 = 7,9$ m.s⁻².

2) Vlastní frekvence hmotného bodu na pružině (mechanického oscilátoru) je 5 Hz. Pružina oscilátoru je natažena směrem dolů z rovnovážné polohy silou 32 mN. Při tomto ději byla vykonána práce 0,4 mJ. Napište rovnici kmitání oscilátoru.

Řešení:

Vykonaná práce při napnutí pružiny se rovná potenciální energii. Pro potenciální energii pružiny platí vztah $E_p = \frac{1}{2} kx^2$. Natažením pružiny na výchylku $x = A$ musíme překonat sílu od pružiny

$|\vec{F}| = kx = kA$ na pružině platí $E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \frac{F}{x} x^2 = \frac{1}{2} Fx = \frac{1}{2} FA$. Amplituda je tedy

$A = \frac{2E_p}{F} = 0,025$ m. Úhlová frekvence se určí ze vztahu $\omega = 2\pi f = 10\pi$. Rovnice kmitů je

$x(t) = 0,025 \sin(10\pi t)$ m.

7. KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

3) Mechanické vlnění je popsáno rovnicí $u(x,t) = 0,03\sin[2\pi(6t+4x)]$ m . Určete amplitudu, periodu, vlnovou délku a fázovou rychlost vlnění. Určete výchylku bodu vzdáleného 2 m od zdroje vlnění v čase 12 s .

Řešení:

Porovnáním s rovnicí vlnění $u(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$ dostaneme $A = 0,03$ m , $\omega = 12\pi$ s⁻¹ ,

$k = 8\pi$ m⁻¹ . Periodu určíme ze vztahu $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,1\bar{6}$ s . Vlnovou délku určíme ze vztahu

$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0,25$ m . Fázovou rychlost vlnění určíme ze vztahu $\lambda = vT \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T} = 1,5$ m.s⁻¹ .

Dosazením do rovnice vlnění dostaneme $u(2 \text{ m}; 12 \text{ s}) = 0,03\sin[2\pi(72+8)]$ m = 0 m .

4) Kolikrát je nutno snížit intenzitu zvuku v daném místě, chceme-li snížit hladinu intenzity zvuku a) o 5 dB a b) o 10 dB .

Řešení:

Vztah pro hladinu intenzity $B = 10\log \frac{I}{I_0}$.

$$B - 5 = 10\log \frac{\frac{1}{n}I}{I_0} = 10\log \frac{1}{n} + 10\log \frac{I}{I_0} = 10\log \frac{1}{n} + B$$

$$\text{a) } 10\log \frac{1}{n} = -5$$

$$n = 3,16$$

Intenzitu zvuku je třeba snížit 3,16 -krát.

$$B - 10 = 10\log \frac{\frac{1}{n}I}{I_0} = 10\log \frac{1}{n} + 10\log \frac{I}{I_0} = 10\log \frac{1}{n} + B$$

$$\text{b) } 10\log \frac{1}{n} = -10$$

$$n = 10$$

Intenzitu zvuku je třeba snížit 10 -krát.