

PŘÍPRAVNÝ KURZ NA MATURITU Z MATEMATIKY

Fakulta strojní ČVUT v Praze 2024

Lekce 9

Analytická geometrie

Příklady z katalogu požadavků

Příklad 1 - MA

Je dána přímka $p: x - 2y - 7 = 0$.

Jaké může být její parametrické vyjádření?

- A) $x = 1 + 2t, y = -3 + t; t \in \mathbf{R}$
- B) $x = -1 - 2t, y = -3 - t; t \in \mathbf{R}$
- C) $x = -3 + 2t, y = 1 + t; t \in \mathbf{R}$
- D) $x = 1 - 2t, y = -3 + t; t \in \mathbf{R}$
- E) $x = -1 + 2t, y = 3 - t; t \in \mathbf{R}$

Příklad 2 - MA

Je dána přímka $q: x = 3t, y = 12 - 4t; t \in \mathbf{R}$.

Vypočtete vzdálenost přímky q od rovnoběžné přímky p , která prochází počátkem soustavy souřadnic.

Příklad 3 - MA

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem S . Označme vektory $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (3.1–3.4), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).

		A	N
3.1	$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$	☐	☐
3.2	$\overrightarrow{SB} = \vec{u} - \vec{v}$	☐	☐
3.3	$\overrightarrow{AE} = 2\vec{v} - \vec{u}$	☐	☐
3.4	$\overrightarrow{FD} = 2\vec{u} - \vec{v}$	☐	☐

Příklad 4 - MX

V rovnoběžníku $ABCD$ je dán střed souměrnosti $S[2; 0]$ a vektory $\vec{u} = B - A = (5; -1)$, $\vec{v} = D - A = (1; 3)$.

Který z uvedených bodů je vrcholem daného rovnoběžníku?

- A) $A[-3; -1]$
- B) $B[5; -1]$
- C) $C[5; 1]$
- D) $D[-1; 1]$
- E) žádný z uvedených

Příklad 5 - MX

Jsou dány vektory $\vec{u} = (-1; 1; 2)$ a $\vec{v} = (-2; 0; 5)$.

Který vektor je kolmý k oběma vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$?

- A) $\vec{a} = (-5; 1; 2)$
- B) $\vec{b} = (-5; -1; 2)$
- C) $\vec{c} = (5; 1; 2)$
- D) $\vec{d} = (-2; 1; 5)$
- E) $\vec{e} = (2; -1; 5)$

Příklad 6 - MX

Kružnice se středem $S[3; -4]$ prochází počátkem soustavy souřadnic.

Napište obecnou rovnici kružnice.

Příklad 7 - MX

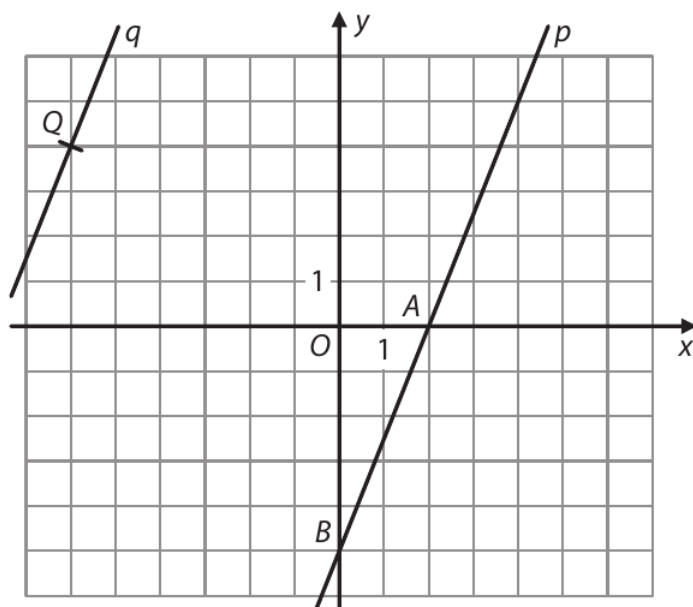
Řídicí přímka paraboly má rovnici $x = 2$. Ohniskem paraboly je bod $F[-4; 2]$.

Napište vrcholovou rovnici paraboly.

Příklady podzim 2023

Příklad 8 - MA

V kartézské soustavě souřadnic Oxy jsou umístěny rovnoběžné přímky p, q .
Přímka p protíná souřadnicové osy v mřížových bodech A, B .
Přímka q prochází bodem $Q[-6; 4]$.



V parametrickém vyjádření přímky p doplňte pravou stranu první rovnice.

$$p: x = \quad , \\ y = 0 + 5t, \quad t \in \mathbf{R}$$

Zapište obě souřadnice průsečíku D přímky q se souřadnicovou osou y .

Příklad 9 - MA

Všechny čtyři vrcholy kosočtverce $ABCD$ leží **na souřadnicových osách** kartézské soustavy souřadnic Oxy . Pro vrcholy A, B kosočtverce platí, že orientovaná úsečka AB je umístěním vektoru $\vec{v} = (12; 5)$.

Jaký je obsah kosočtverce $ABCD$?

- A) 52
- B) 60
- C) 120
- D) 169
- E) jiný obsah

Příklad 10 - MA

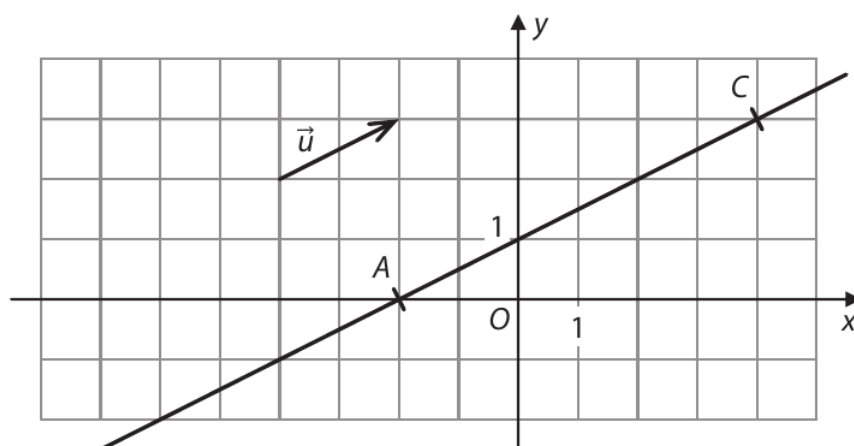
Vektor $\vec{u} = (3; u_2)$ je kolmý k vektoru $\vec{w} = (-3; 1)$.

Jaká je velikost vektoru $\vec{u}$?

- A) $3\sqrt{10}$
- B) $\sqrt{10}$
- C) 10
- D) 3
- E) jiná velikost

Příklad 11 - MX

Libovolný bod X přímky AC lze vyjádřit rovnicí $X = A + t \cdot \vec{u}$, kde $t \in \mathbf{R}$.



Body A, C i počáteční a koncový bod orientované úsečky, která je umístěním vektoru $\vec{u}$, jsou v mřížových bodech.

Určete množinu všech hodnot parametru t , pro něž je bod X bodem úsečky AC .

$t \in$ _____

Příklad 12 - MX

Pro kružnici k a přímku p platí:

$$k: x^2 + (y - 3)^2 = 25$$

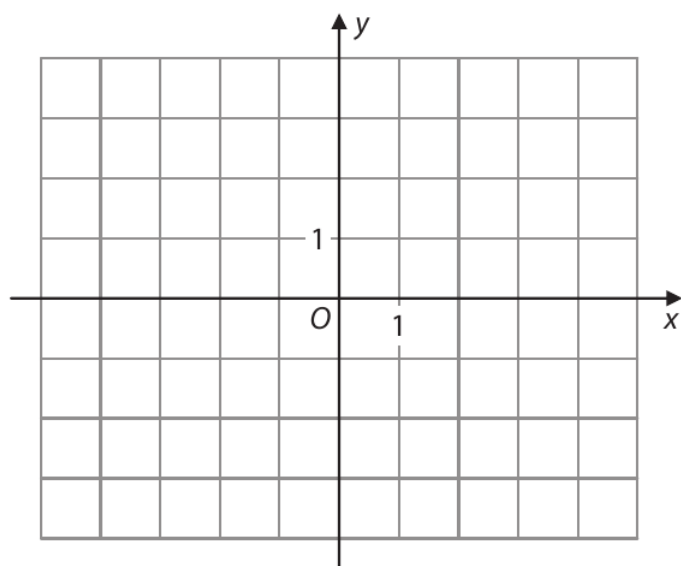
$$p: y = x + 2$$

Zapište souřadnice průsečíků P, Q přímky p a kružnice k (pokud existují).

Příklad 13 - MX

Elipsa má rovnici $x^2 - 2x - 15 + 4y^2 = 0$.

Tečny k elipse v jejích hlavních a vedlejších vrcholech vymezují obdélník $KLMN$.



Určete obě souřadnice středu $S[s_1; s_2]$ elipsy.

Vypočtěte excentricitu e elipsy.

V kartézské soustavě souřadnic Oxy zakreslete obdélník $KLMN$.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

Další příklady

Příklad 14

Napište parametrický, obecný a směnicový tvar rovnice přímky, která prochází body $A = [5, 2]$, $B = [9, 4]$. Načrtněte obrázek.

Příklad 15

Určete a načrtněte kuželosečky, které jsou dány následujícími rovnicemi:

- a) $x = y^2 - 3$
- b) $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 2 = 0$
- c) $x^2 + y^2 + 6y - 3 = 0$
- d) $x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

Příklad 16

Načrtněte rovinný obrazec D , který je omezen danými křivkami nebo je zadán nerovnicemi:

- a) $x + y \leq 1, x + 1 \geq y \geq 0$
- b) $y \geq 0, y \leq 2 - x, x \geq y^2$
- c) $2x + 2y = 5, xy = 1$
- d) $x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq 0$

Výsledky

Příklad 1: A

Příklad 2: $36/5$

Příklad 3: A, A, A, N

Příklad 4: A

Příklad 5: C

Příklad 6: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

Příklad 7: $(y - 2)^2 = -12(x + 1)$

Příklad 8: $x = 2 + 2t$, $D = [0; 19]$

Příklad 9: 120 C

Příklad 10: $3\sqrt{10}$ A

Příklad 11: $t \in < 0; 3 >$

Příklad 12: $P = [4; 6]$, $Q = [-3; -1]$

Příklad 13: $S = [1; 0]$, $e = 2\sqrt{3}$, obrázek

Příklad 14: $x = 5 + 4t$, $y = 2 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$,

$x - 2y - 1 = 0$,

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Příklad 15:

a) Parabola, osa v ose x, vrchol $V = [-3, 0]$, otevřená doprava

b) Elipsa $S = [2, -1]$, $a = 2$, $b = \sqrt{2}$

c) Kružnice $S = [0, -3]$, $r = \sqrt{12}$

d) Hyperbola $S = [3, 1]$, $a = 4$, $b = 2$

Příklad 16:

a) Rovnoramenný trojúhelník nad osou x, souměrný podle osy y

b) "Křivočarý" trojúhelník v prvním kvadrantu ohraničený dvěma úsečkami a částí paraboly

c) Obrazec ohraničen v prvním kvadrantu úsečkou a rovnosou hzperbolou

d) Posunutý půlkruh v prvním kvadrantu, $S = [2, 0]$

Vybrané vzorce

1. Body a vektory:

- Vzdálenost dvou bodů:

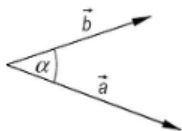
$$A = [x_A, y_A, z_A], B = [x_B, y_B, z_B]$$

(velikost vektoru $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A$)

$$\|AB\| = \|\vec{u}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

- Skalární součin a úhel dvou vektorů:

Skalární součin nenulových vektorů



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ - kolmé vektory}$$

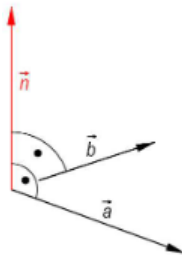
$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}, \quad \alpha = \text{úhel vektorů}$$

Příklad 1: $\vec{a} = (2, -4, 2), \vec{b} = (-1, 2, 2) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -6$

Příklad 2: $\vec{a} = (2, -4, 2), \vec{b} = (-1, 2, ?), \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{b} = (-1, 2, 5)$

- Vektorový součin:

Vektorový součin nenulových vektorů



$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, -[a_1 b_3 - a_3 b_1], a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\vec{n} \perp (\vec{a}, \vec{b})$$

Příklad: $\vec{a} = (2, 4, 3), \vec{b} = (1, 2, 2), \vec{a} \times \vec{b} = ?$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (2, 4, 3)$$

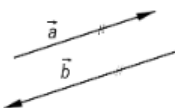
$$\begin{array}{r} \times (1, 2, 2) \\ (2, -1, 0) \end{array}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = (2, -1, 0) \cdot (2, 4, 3) = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{a}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{b} = (2, -1, 0) \cdot (1, 2, 2) = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{b}$$

- Lineárně závislé (rovnoběžné) vektory:

Závislé ("rovnoběžné") nenulové vektory



$$\vec{b} = k \cdot \vec{a}$$

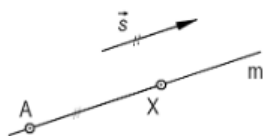
Příklad: $\vec{a} = (-1, 2, -3), \vec{b} = (2, -4, 6) \Rightarrow \vec{b} = -2 \cdot \vec{a} \Rightarrow \text{závislé vektory}$

- Vzdálenost bodu od přímky:

$$v(A, p) = \frac{|a \cdot a_x + b \cdot a_y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ kde obecná rovnice přímky } p \text{ je } ax + by + c = 0 \text{ a bod } A \text{ má souřadnice } a_x, a_y$$

2. Přímka:

- Parametrická rovnice přímky:



Parametrická rovnice přímky

určené bodem A a nenulovým směrovým vektorem $\vec{s}$:

$$X = A + t\vec{s}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= x_A + t.s_1 \\ y &= y_A + t.s_2 \\ z &= z_A + t.s_3 \end{aligned} \quad t \in (-\infty, \infty)$$

Poznámka: Jedna přímka má nekonečně mnoho tvarů rovnic závislých na volbě bodu a směrového vektoru.

Příklad 1: $m \equiv AB, \quad A[1, -1, 2], \quad B[3, 3, 0]$

$$X = [1, -1, 2] + (2, 4, -2)t, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

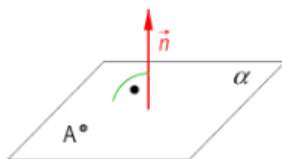
$$X = [1, -1, 2] + (1, 2, -1)t, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

Příklad 2: rovnice úsečky AB , polopřímky AB

- Obecná rovnice přímky v rovině:
 $ax + by + c = 0$, kde $\vec{n} = (a, b)$ je normálový vektor
- Směrnice rovnice přímky v rovině:
 $y = kx + q$, kde $k = \tan \alpha = s_2/s_1$ je směrnice dané přímky a $\vec{s} = (s_1, s_2)$ je její směrový vektor

3. Rovina:

- Obecná rovnice roviny:



Obecná rovnice roviny α

$ax + by + cz = d$, $(a, b, c) = \vec{n}$ je normálový vektor roviny α

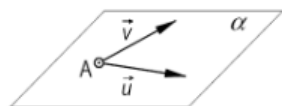
Příklad 1: $\alpha \equiv A[1, 2, -1], \vec{n}(2, -1, 3)$

$$\alpha: 2x - y + 3z = -3$$

Příklad 2: $\alpha \equiv A[0, -1, 1], B[1, 0, 2], C[1, 1, 5]$

$$(\vec{B} - \vec{A}) \times (\vec{C} - \vec{A}) = (2, -3, 1), \quad \alpha: 2x - 3y + z = 4$$

- Parametrická rovnice roviny:



Parametrická rovnice roviny α

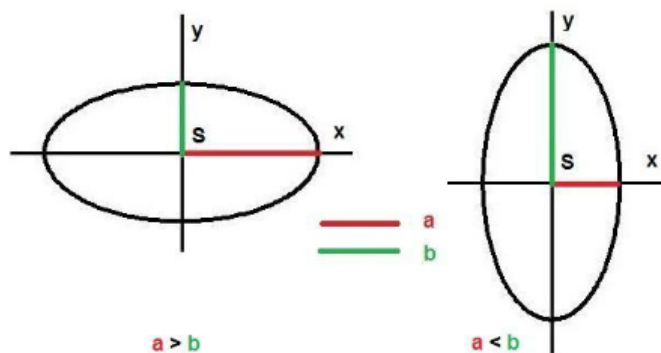
$$X = A + t\vec{u} + w\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}$$

Převod na obecnou rovnici roviny:

$$(a, b, c) = \vec{u} \times \vec{v}, \quad ax + by + cz = d, \quad d = ax_A + by_A + cz_A$$

4. Kuželosečky:

- Elipsa:



$a > 0 \rightarrow$ velikost poloosy ve směru osy x

$b > 0 \rightarrow$ velikost poloosy ve směru osy y

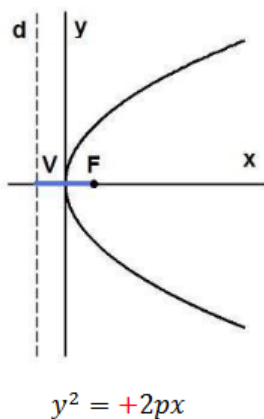
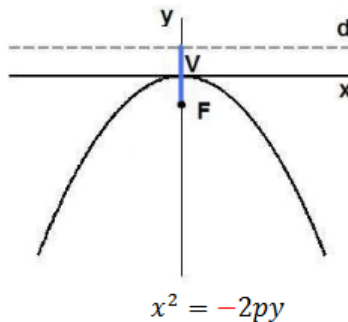
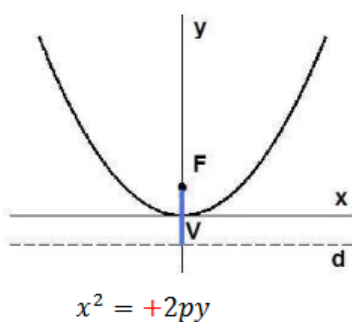
vrcholy: $[a, 0], [-a, 0], [0, b], [0, -b]$

v posunuté poloze (střed $S = [m, n]$) $\rightarrow \boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1}$

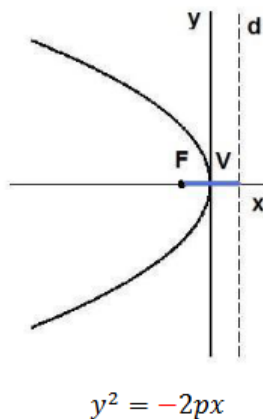
- Parabola:
parametr $p > 0$

ohnisko: $F = [0, \pm \frac{p}{2}]$ nebo $F = [\pm \frac{p}{2}, 0]$

řídící přímka: $y = \pm \frac{p}{2}$ nebo $x = \pm \frac{p}{2}$



— p



v posunuté poloze (vrchol $V = [m, n]$) $\rightarrow$

$$\boxed{(x-m)^2 = \pm 2p(y-n)} \text{ nebo } \boxed{(y-n)^2 = \pm 2p(x-m)}$$

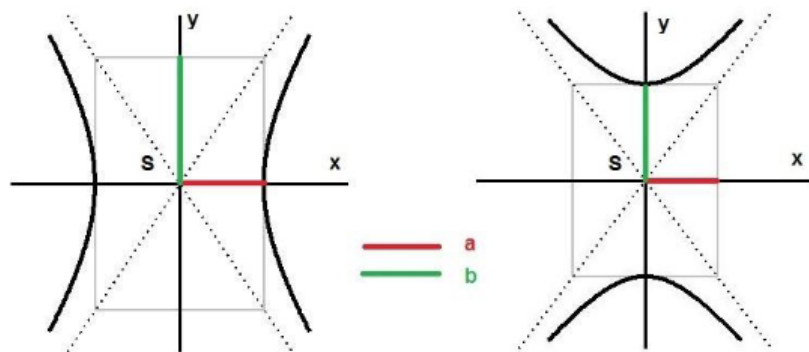
- Hyperbola:

$a > 0 \rightarrow$ velikost poloosy ve směru osy x

$b > 0 \rightarrow$ velikost poloosy ve směru osy y

vrcholy: $[a, 0], [-a, 0], [0, b], [0, -b]$

asymptoty: $y = \pm \frac{b}{a}x$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = +1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

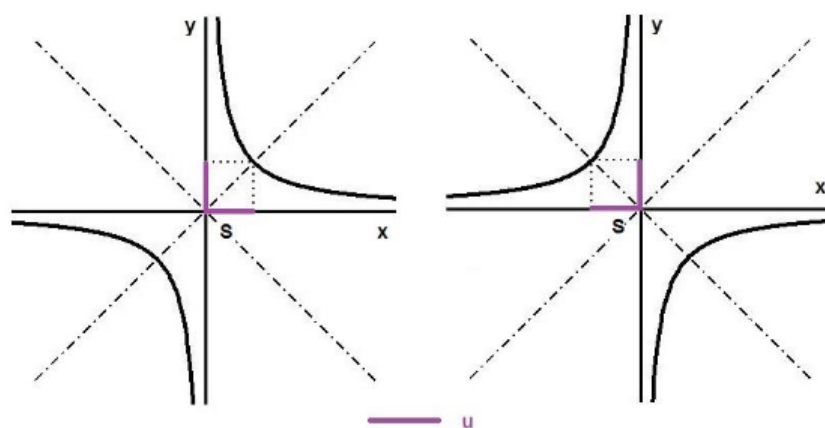
v posunuté poloze (střed $S = [m, n]$) $\rightarrow \boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = \pm 1}$

- Rovnoosá hyperbola:

koeficient $k > 0$

hlavní vrcholy: $[u, u], [-u, -u], ([u, -u], [-u, u])$, kde $u = \sqrt{k}$

asymptoty: $y = 0, x = 0$; osy: $y = \pm x$



$$y = +\frac{k}{x}$$

$$y = -\frac{k}{x}$$

v posunuté poloze (střed $S = [m, n]$) $\rightarrow \boxed{y - n = \pm \frac{k}{x - m}}$

Videa z lekcí najdete na

<https://fs.cvut.cz/pripravny-kurz-z-matematiky/>

Dotazy, názory, připomínky, přání pište na

ludek.benes@fs.cvut.cz